



Eduard Šubert: *Koktejl – nápoj je vektorem z lineárního obalu ingrediencí.*

V roce 2012 se na katedře matematiky FJFI ČVUT v Praze konala **Matematická fotosoutěž**. Vítězný snímek – týkající se právě lineární algebry – jsme si se svolením autora vypůjčili pro osvěžení této učebnice.

Předmluva

Skripta, která držíte v ruce, vznikla v úzké spolupráci se studenty, kteří byli v akademickém roce 2012–2013 prváky. Texty jsem zveřejňovala postupně jako poznámky k přednáškám a studenti mi sdělovali své připomínky k nim, opravovali nalezené překlepy, dávali zlepšující návrhy. Dva z nich nakonec otiskli své stopy do skript tak nesmazatelně, že jsem jim navrhla spoluautorství. (Bohužel jejich jména nefigurují na obálce, protože to podle pravidel není možné, ale to nic opravdovosti jejich spoluautorství neubírá.) **Jakub Krásenský** nesmírně pečlivě texty pročetl, odstranil řadu chyb, vytříbil jazyk a sjednotil styl. Rodící se skripta s ním prožila i prázdniny – procestovala ČR i cizinu, když Jakub vychytával poslední mouchy. **Jakub Klinkovský** se zase chopil ilustrací. Nepřejte si vědět, jak vypadaly obrázky před jeho zásahem. Ovšem poděkování patří i řadě dalších studentů. Jmenovitě pak **Kateřině Jirákové**, která při učení se na zkoušku odhalila četné nepřesnosti, a **Ondřeji Groverovi**, jenž mě zejména upozornil na důležitost formátování.

Skripta jsou určena studentům prvního ročníku „Jaderky“. Zahrnují látku k povinnému předmětu Lineární algebra 1 (LNA1) a volitelnému předmětu Lineární algebra plus (LAP). Symbolem ★ jsou označeny pasáže, které se týkají pouze LAP a v rámci LNA1 není jejich znalost vyžadována. Hvězdičkami je také naznačena obtížnost úkolů, které jsou ponechány čtenáři k řešení (žádná hvězdička = lehký úkol, * = obtížnější úkol, ** = těžký úkol). Dále se v textu objevují poznámky pod čarou, které obsahují směs historických údajů, informací ke značení, terminologii apod. (Jsou určeny k letnému pročtení, nikoliv k učení.)

Lineární algebra je velmi abstraktní, univerzální a logicky vystavěná. Jelikož se na středních školách nevyučuje, budete mít možnost během prvého semestru sledovat, jak se matematická disciplína buduje úplně od základu. Naučíte se pracovat systémem „definice, věta, důkaz“. Navíc kouzlo lineární algebry spočívá v jednoduchosti důkazů (žádné umělé konstrukce jako v matematické analýze).

Začátečník zřejmě tento fakt neocení ihned. Dokonce se může stát, že se velkého stupně abstrakce zalekne. Proto je pro něj připravena v dodatku kapitola z historie lineární algebry, která mu prozradí, že pojmy ze začátku semestru, například vektorový prostor, byly v historii až jakousi třesničkou na dortu – vývoj lineární algebry završily. Proto není neobvyklé, že prvákovi v úvodních týdnech semestru připadá lineární algebra nepochopitelná.

Lineární algebra je – opět ve srovnání s matematickou analýzou – mladá disciplína. První učebnice vznikaly až na začátku 20. století. Na FJFI je autorem koncepce kurzu lineární algebry prof. **Miloslav Havlíček**, který ji také zpočátku učil. Dlouhá léta pak přednášel lineární algebru **Jiří Pytlíček**, prom. mat. Svým precizním výkladem, spravedlivým přístupem, ale i pověstnou přísností vychoval celé generace matematiků – mít hotovou zkoušku od Pytlíčka, to totiž něco znamenalo! Asistent Pytlíček se stal legendou, o čemž svědčí i pamětní deska, již „mimořádnému učiteli, který na FJFI v letech 1966–2011 svým

nezaměnitelným způsobem přednášel lineární algebru“ věnovali studenti z vlastní iniciativy. I v těchto skriptech tu a tam na asistenta Pytlíčka zavzpomínáme a připomeneme jeho slavné výroky.

Pytlíčkův přístup k lineární algebře by se dal označit za bourbakistický¹ – razil názor, že lineární algebra je krásná ve své abstraktnosti a obecnosti a není třeba tuto krásu zastírat ilustracemi pojmů na konkrétních obyčejných příkladech (alespoň ne během přednášek a ve skriptech). V tomto směru jsem se ovšem nesnažila asistenta Pytlíčka kopírovat. Místo toho jsem se nechala ovlivnit doc. **Emilem Humhalem**, který taktéž dlouhá léta lineární algebru přednášel (ovšem hlavně studentům nematematických směrů) a prosazoval zásadu, že i přes abstraktnost může lineární algebra na postačující úrovni pochopit každý pilný student. Proto se snažíme ilustrovat nové pojmy a práci s nimi na příkladech a nechybí ani motivační texty, které mají čtenáři ukázat, že lineární algebra je všudypřítomná a že její poznatky ještě mnohokrát zužitkuje. (Z motivačních úloh se ale samozřejmě nezkouší.)

Jsem velmi ráda, že lektorkou skript se stala prof. **Edita Pelantová**, která se postarala, abychom ve své snaze vše vyložit nezacházeli až do zbytečných detailů. A zejména díky své peanovské² schopnosti odhalovat chyby a zjednodušovat důkazy pohlídala korektnost tvrzení a matematickou eleganci důkazů.

Závěrečný dík pak patří Ing. **Petru Ambrožovi**, Ph.D., a Ing. **Tomáši Hejdovi** za jejich cenné rady týkající se formátování a typografie.

V Třeboni 1. srpna 2013

Lubomíra Balková

¹Nicolas Bourbaki byl pseudonym, pod kterým od roku 1935 publikovala své práce skupina převážně francouzských matematiků. Členové této skupiny jsou označováni jako bourbakisté. Jejich cílem bylo vybudovat celou matematiku axiomaticky na základě teorie množin. A to co nejobecněji, naprosto rigorózně a zásadně bez použití obrázků, příkladů a bez zájmu o aplikace.

²Italský matematik Giuseppe Peano – jak je uvedeno i v Dodatku 2: Historie vektorového prostoru – měl schopnost snadno nacházet chyby a protipříklady a v matematických diskuzích a textech se vyjadřoval přesněji než všichni ostatní.

Seznam použitých symbolů

Použitá písmena řecké abecedy a jejich výslovnost

α	„alfa“
β	„beta“
γ	„gama“
δ	„delta“
Θ	„théta“
κ	„kapa“
λ	„lambda“
π	„pí“
φ	„fí“

Další použité symboly

★	povinné pro studenty LAP – pro ostatní nepovinné, nikoliv nepřístupné :)
*	obtížnější úkol
**	těžký úkol
$\hat{n}$	$\{1, 2, \dots, n\}$
$\emptyset$	prázdná množina
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\operatorname{Re}(\alpha)$	reálná část α
$\operatorname{Im}(\alpha)$	imaginární část α
$\bar{\alpha}$	číslo komplexně sdružené k α
$\langle 0, 1 \rangle$	uzavřený interval
$:=$	rovnost definující nový objekt
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
$\in$	náležet, být prvkem
$A \times B$	kartézský součin množin
$A \subset B$	A je podmnožinou B (mohou se rovnat)
$A \subsetneq B$	A je podmnožinou B , ale nerovna jí se
$\bigcap_{i=1}^{\ell}$	průnik ℓ množin
$\mathbb{A}$	matice (soustavy)

$(\mathbb{A} \vec{b})$	rozšířená matice soustavy
$\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$	součin matic
$\mathbb{O}$	nulová matice
$\mathbb{I}$	jednotková matice
$\sim$	ekvivalentní řádková úprava
T	(číselné) těleso
V	vektorový prostor
α, β, γ	čísla z tělesa
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$	vektory
$\vec{0}$	nulový vektor
$-\vec{a}$	opačný vektor k $\vec{a}$
$\vec{a} \oplus \vec{b}$	sčítání vektorů
$\alpha \odot \vec{a}$	násobení vektoru číslem
T^n	prostor n -tic čísel
$T^{m,n}$	prostor matic o m řádcích a n sloupcích
$m \times n$	typ matice – m řádků a n sloupců
$\mathbb{A}_{ij}, [\mathbb{A}]_{ij}, a_{ij}$	prvek matice v i -tém řádku a j -tém sloupci
$\mathbb{A}_{i\bullet}$	i -tý řádek matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}_{\bullet j}$	j -tý sloupec matice $\mathbb{A}$
p	polynom
st p	stupeň polynomu
$\mathcal{O}$	nulový polynom
$\mathcal{P}$	prostor polynomů
$\mathcal{P}_n$	prostor polynomů stupně maximálně $n - 1$
$\mathcal{E}$	standardní báze $T^n, T^{m,n}, \mathcal{P}_n$
$\mathcal{E}_n$	standardní báze T^n (pro zdůraznění dimenze)
$\vec{e}_i$	vektor ze standardní báze T^n
$\mathbb{E}_{i,j}$	vektor ze standardní báze $T^{m,n}$
e_i	vektor ze standardní báze $\mathcal{P}_n$
$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$	lineární kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$	lineární obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$
$\dim V$	dimenze V
V_n	prostor dimenze n
$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$	soubor vektorů
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	báze vektorového prostoru
$(\vec{x})_{\mathcal{X}}$	souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$
$x_i^\#$	i -tý souřadnicový funkcional v bázi $\mathcal{X}$
$\subset \subset$	podprostor
$P + Q$	součet množin

$P \oplus Q$	direktní součet množin
$P \cong Q$	izomorfní podprostory
$\operatorname{codim} P$	kodimenze podprostoru P
Θ	nulové zobrazení
I	identický operátor
A, B, C	lineární zobrazení
D	operátor derivování
S	operátor integrování
AB	složené zobrazení
$A\vec{x}$	obraz vektoru $\vec{x}$
$A(M)$	obraz množiny M
$A^{-1}(N)$	vzor množiny N
$\mathcal{L}(P, Q)$	prostor lineárních zobrazení P do Q
φ	funkcionál
$\ker A$	jádro A
$d(A)$	defekt A
$h(A)$	hodnost A
$V^\#$	duální prostor k V
$\mathcal{X}^\#$	duální báze k bázi $\mathcal{X}$
${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$	matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$
${}^{\mathcal{X}}A$	matice operátoru A v bázi $\mathcal{X}$
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\alpha$	afinní obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$
W	lineární varieta
$\mathcal{Z}(W)$	zaměření W
$\alpha W_1 + \beta W_2$	lineární kombinace W_1 a W_2
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\kappa$	konvexní obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$
K	konvexní množina

Obsah

1	Soustavy lineárních algebraických rovnic	13
2	Vektorový prostor	18
2.1	Definice vektorového prostoru	18
2.2	Příklady vektorových prostorů	24
2.3	Lineární kombinace vektorů	28
2.4	Lineární závislost a nezávislost	31
2.5	Báze a dimenze	34
2.6	Souřadnice	44
3	Podprostory	49
3.1	Definice podprostoru	49
3.2	První věta o dimenzi	54
3.3	Doplňěk podprostoru	58
4	Lineární zobrazení	60
4.1	Definice lineárního zobrazení	60
4.2	Hodnost, jádro, defekt	69
4.3	Druhá věta o dimenzi	74
4.4	Izomorfismus	75
4.5	Doplňěk na prostoru nekonečné dimenze ★	77
4.6	Projektor ★	78
4.7	Duální báze ★	79
5	Frobeniova věta	81
5.1	Matice a lineární zobrazení	81
5.2	Hodnost matice	88
5.3	Vztah hodnosti matice a zobrazení	88
5.4	Regulární a singulární matice	89
5.5	Frobeniova věta	90
5.6	Hodnost součinu matic	92
5.7	Hodnost transponované matice ★	92
6	Lineární geometrie ★	96
6.1	Lineární variety	96
6.2	Afinní obaly	97
6.3	Variety jako posunuté podprostory	99
6.4	Vzájemná poloha variet a operace s nimi	101
6.5	Variety jako afinní obaly	103

6.6	Variety jako průniky nadrovin	106
7	Konvexní množiny ★	109
8	Dodatek 1: Polynomy	114
9	Dodatek 2: Historie vektorového prostoru	118
	Rejstřík	124
	Reference	127

1 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic (LAR) je základní dovedností, bez níž se v lineární algebře neobejdeme. Proto se hned v úvodní kapitole naučíme rozhodnout, zda je daná soustava LAR řešitelná, a najít alespoň jedno řešení (pokud soustava řešitelná je). Na kompletní popis množiny řešení soustavy LAR budeme muset počkat až do konce semestru – elegantně jej formuluje Frobeniova věta.

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou sadu rovnic tvaru:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ jsou komplexní.

Názvosloví:

- Sloupec $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ se nazývá **sloupцем pravé strany**.
- Sloupec komplexních čísel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, pro něž jsou všechny rovnosti splněny, se nazývá **řešením soustavy**.
- **Maticí soustavy** rozumíme tabulku koeficientů u neznámých (v i -tém řádku jsou koeficienty z i -té rovnice):

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- **Rozšířenou maticí soustavy** nazýváme matici soustavy rozšířenou o sloupec pravé strany:

$$(\mathbb{A}|\vec{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

- Říkáme, že soustava je **homogenní** neboli **bez pravé strany**, pokud je sloupec pravé strany nulový, tj. $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.
- V opačném případě se jedná o **soustavu s pravou stranou**.
- Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Toto řešení nazýváme **triviálním**.

Poznámka 1.1. Důležité je uvědomit si, že existují soustavy, jež řešení nemají. Například

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7. \end{aligned}$$

A naopak existují soustavy, které jich mají více. Například

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

má řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a také $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dokonce má nekonečně mnoho řešení.

V této kapitole se nebudeme učit hledat všechna řešení, ale budeme se zabývat dvěma trochu lehčími otázkami:

- (a) „Jak zjistit, zda je daná soustava řešitelná?“
- (b) „Jak najít alespoň jedno řešení?“ (Samozřejmě za předpokladu, že soustava je řešitelná.)

Budeme převádět soustavu do tak jednoduchého tvaru, že z něj bude odpověď na tyto dvě otázky zřejmá. Důležité je, že úpravy budeme provádět tak, abychom neměnili množinu řešení. Takovým úpravám se říká **ekvivalentní** a budeme používat následující tři:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice číslem $\alpha \neq 0$.

Snadno nahlédneme, že takovými úpravami se skutečně množina řešení soustavy nemění. Pro zjednodušení nemusíme tyto úpravy provádět s rovnicemi, ale můžeme je provádět přímo v rozšířené matici soustavy. Jde potom o úpravy:

1. záměna dvou řádků,

2. přičtení násobku jiného řádku k vybranému řádku,
3. násobení řádku číslem $\alpha \neq 0$.

Tyto úpravy budeme provádět s cílem dostat rozšířenou matici soustavy do tzv. horního stupňovitého tvaru.³

Definice 1.2. Matice $\mathbb{B}$ o m řádcích a $n + 1$ sloupcích s prvky $b_{ij}, i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n+1}$, tedy tabulka čísel

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & b_{1(n+1)} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & b_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} & b_{m(n+1)} \end{pmatrix},$$

je v **horním stupňovitém tvaru**, pokud má všechny prvky nulové, nebo existuje $\ell \in \widehat{m}$ a indexy $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ takové, že $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell \leq n + 1$ a platí:

1. $b_{ik_i} \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$,
2. $b_{ij} = 0$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$ a $j < k_i$,
3. $b_{ij} = 0$ pro každé $i > \ell, j \in \widehat{n+1}$.

Nenulová matice v horním stupňovitém tvaru má tudíž tyto vlastnosti: V prvním řádku je první nenulový prvek ve sloupci k_1 , ve druhém řádku ve sloupci $k_2, \dots$, až v ℓ -tém řádku ve sloupci k_ℓ . Od $(\ell + 1)$. řádku počínaje jsou všechny řádky nulové. Soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru má proto následující jednoduchou podobu:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{1k_1}x_{k_1} & + & \dots & + & b_{1k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & b_{1k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{1n}x_n & = & b_{1(n+1)} \\ & & & & b_{2k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & b_{2k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{2n}x_n & = & b_{2(n+1)} \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & b_{\ell k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{\ell n}x_n & = & b_{\ell(n+1)}. \end{array}$$

Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ nazýváme **hlavními sloupci**, ostatní sloupce nazýváme **vedlejšími**. Ze soustavy upravené do horního stupňovitého tvaru jednoduše vyčteme odpověď na řešené problémy.

(a) Soustava je řešitelná, právě když sloupec pravé strany je vedlejší.

Je zřejmé, že když je sloupec pravé strany hlavní, tj. $k_\ell = n + 1$, má poslední rovnice tvar $0 = b_{\ell(n+1)}$. To znamená, že nula má být rovna nenulovému číslu, což není možné. Fakt, že soustava řešitelná je, když je sloupec pravé strany vedlejší, vyplývá z následujícího tvrzení.

³Používá se i termín Gaussova matice, odstupňovaná matice či (redukovaná) schodovitá matice.

- (b) Je-li sloupec pravé strany vedlejší, řešení soustavy nalezneme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.

Je jasné vidět, že pokud jsou neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvoleny, dopočítáme z poslední rovnice x_{k_ℓ} , po dosazení do předposlední rovnice dopočítáme $x_{k_{\ell-1}}$ atd.

Poznámka 1.3. Není těžké ověřit, že platí následující tvrzení: Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravé strany je vedlejší.

Když totiž neexistují vedlejší sloupce v matici soustavy, nelze žádné neznámé volit. Důsledkem poté je, že homogenní soustava má jen triviální řešení, právě když má matice soustavy jen hlavní sloupce. Pokud má matice homogenní soustavy i vedlejší sloupce, pak při hledání netriviálního řešení je třeba zvolit alespoň jednu z neznámých odpovídajících vedlejšímu sloupci nenulovou.

Zbývá zodpovědět otázku: „Lze každou rozšířenou matici soustavy převést ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru?“ Ano! Dokonce stačí první a druhá ekvivalentní řádková úprava. Následující algoritmus se označuje jako **Gaussova eliminace**:⁴

- Je-li matice nulová, pak už je v horním stupňovitém tvaru.
- Je-li matice nenulová, prohledáme první sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek zaměníme s prvním řádkem. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, postupujeme stejně s druhým sloupcem. Označíme k_1 index prvního sloupce, ve kterém najdeme nenulové číslo. Od každého řádku počínaje druhým odečteme takové násobky prvního řádku, abychom ve sloupci s indexem k_1 dostali nuly.
- Prohledáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od druhého řádku počínaje. Index prvního sloupce, v němž najdeme nenulový prvek, označíme k_2 . Odpovídající řádek zaměníme s druhým. Od třetího a dalších řádků odečítáme takové násobky druhého řádku, abychom od třetího řádku počínaje vyrobili ve sloupci s indexem k_2 samé nuly.
- Analogicky postupujeme tak dlouho, dokud jsou v prohledávaných sloupcích na potřebných místech nenulové prvky.

Příklad 1.4. Zjistěte, zda je následující soustava řešitelná. Pokud ano, najděte jedno

⁴Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik. Eliminační algoritmus nese jméno na Gaussovu počest, ačkoliv byl v jeho době již běžně používán. Více se k historii eliminace a řešení soustav LAR obecně dozvíte v dodatku skript pro letní semestr Lineární algebra 2.

řešení.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & & - 2x_4 = 1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & + x_4 = 0. \end{array}$$

Řešení: Rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru. Symbol $\sim$ značí provedení ekvivalentní řádkové úpravy (úprav).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Soustava je řešitelná, protože sloupec pravých stran je vedlejší. Řešení najdeme volbou neznámé v jediném vedlejším sloupci, kterým je ten třetí. Zvolíme třeba $x_3 = 0$. Zbylé neznámé dopočítáme ze soustavy odpovídající matici v horním stupňovitém tvaru

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & & - 2x_4 = 1 \\ & & 10x_2 & + & 5x_3 - 17x_4 = 4 \\ & & & & 3x_4 = -1. \end{array}$$

Dostáváme $x_4 = -1/3$, $x_2 = -1/6$, $x_1 = 5/6$. Řešením je tudíž například $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Na cvičeních si ukážeme, jak upravovat matice do horního stupňovitého tvaru co nejšikovněji. Naučte se, že je lepší si úpravy rozmyslet, než je provádět mechanicky. Jinak budete – podle slov asistenta Pytlíčka – „milovníky zlomků“.

2 Vektorový prostor

Axiomatická definice vektorového prostoru, kterou v této kapitole vyslovíme, je velmi abstraktní. Aby čtenáře neodradila, je připojena v dodatku skript kapitola o historii lineární algebry. V ní je vysvětleno, že lineární algebra se učí „proti toku času“ a že vrcholem veškeré abstrakce je právě pojem vektorového prostoru. Tedy hlavu vzhůru, po prokousání se touto kapitolou už bude vše jen jednodušší a jednodušší...

Motivace. Vektorový prostor vás bude provázet celým studiem. Jde totiž o naprosto přirozenou strukturu, jejíž vlastnosti splňuje celá řada tříd známých objektů: vektory z „našeho“ třídídimenzionálního světa, matice, polynomy, funkce, posloupnosti, ale také například některé matematické hříčky. Jeden takový křížovkářský příklad uveďme: *Popište množinu všech latinských čtverců, tj. matic o třech řádcích a třech sloupcích takových, že součty ve všech řádcích i ve všech sloupcích se rovnají.*

K úloze se vrátíme na konci kapitoly a podíváme se na její souvislost s pojmem vektorový prostor.

2.1 Definice vektorového prostoru

Ústředním objektem lineární algebry je vektorový prostor. Uveďme nejprve dva pojmy, které budeme v jeho definici využívat.

Definice 2.1. Kartézským součinem množin A a B nazveme množinu uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a \in A, b \in B$, tj.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.^5$$

Zobrazením $f: A \rightarrow B$ je taková podmnožina $A \times B$, pro niž platí:

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c.$$

Místo $(a, b) \in f$ obvykle píšeme $f(a) = b$. V celých skriptech navíc budeme pod zápisem $f: A \rightarrow B$ rozumět, že f zobrazuje A do B , tj. definiční obor f je celá množina A a obor hodnot f je podmnožinou B .

Definice 2.2. Číselným tělesem nazveme každou množinu $T \subset \mathbb{C}$, která má alespoň dva prvky a splňuje pro každé $\alpha, \beta \in T$:

1. $\alpha + \beta \in T$ (uzavřenost T na sčítání).
2. $\alpha \cdot \beta \in T$ (uzavřenost T na násobení).

⁵Množinový zápis není jednotný. V matematické literatuře je momentálně asi nejčastější zápis $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ a objevuje se také $\{(a, b); a \in A, b \in B\}$.

3. $-\alpha \in T$ (uzavřenost T vůči opačnému prvku).
4. Pokud $\alpha \neq 0$, potom $\frac{1}{\alpha} \in T$ (uzavřenost T vůči převrácené hodnotě).

Pojem tělesa je v algebře definován mnohem obecněji, viz například [1].⁶ Ve vyšších ročnících budou poznatky z lineární algebry zobecněny i pro vektorové prostory nad obecnými tělesy. My se ale omezíme výhradně na číselná tělesa, a i když v dalším textu budeme pro úsporu místa psát těleso, máme vždy na mysli číselné těleso. Uvidíme, že i tak jde o bohatou třídu a že se v některých kapitolách zejména v letním semestru budou objekty lineární algebry chovat jinak nad různými číselnými tělesy a my budeme nuceni pracovat s číselnými tělesy velmi opatrně.

Poznámka 2.3. Každé těleso T obsahuje čísla 0 a 1. Podle definice totiž obsahuje T nějaký prvek α . Pak také $-\alpha \in T$ a dále též $\alpha + (-\alpha) = 0 \in T$. Jelikož T obsahuje alespoň dva prvky, určitě obsahuje nějaké $\alpha \neq 0$. Tedy také $\frac{1}{\alpha} \in T$ a dále rovněž $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \in T$.

Poznámka 2.4. Zamysleme se nad tím, které množiny (ne)tvoří těleso.

- Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ netvoří těleso, neboť například $3 \in \mathbb{N}$, ale $-3 \notin \mathbb{N}$.
- Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ netvoří těleso, protože například $2 \in \mathbb{Z}$, ale $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ tvoří těleso. Je to nejmenší těleso ve smyslu inkluze, tj. $\mathbb{Q}$ je podmnožinou každého číselného tělesa.
- Množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ a komplexních čísel $\mathbb{C}$ tvoří tělesa.⁷ V příkladech budeme právě s těmito tělesy pracovat nejčastěji.

Úkol 2.5. Ověřte, že množina čísel $\{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ tvoří číselné těleso.

Definice 2.6. Necht jsou dány:

- (a) číselné těleso T (prvky nazýváme **čísly**),⁸
- (b) neprázdná množina V (prvky nazýváme **vektory**),
- (c) zobrazení $\oplus: V \times V \rightarrow V$ (hovoříme o **sčítání vektorů**),
- (d) zobrazení $\odot: T \times V \rightarrow V$ (hovoříme o **násobení vektoru číslem**).

Řekneme, že V je **vektorovým prostorem** nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$, pokud je splněno následujících osm podmínek (nazýváme je **axiomy vektorového prostoru**):

⁶V anglických, ale i některých českých textech se používá pro těleso symbol F ze slova field, což je anglický výraz pro těleso (ač doslovný překlad je pole).

⁷V literatuře se vyskytují i jiné symboly. Například $R, \mathbf{R}, \mathcal{R}$ pro reálná čísla a K nebo $\mathbf{C}$ či $\mathcal{C}$ pro komplexní čísla.

⁸Pro prvek tělesa se užívá i termín skalár.

1. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ (**komutativní zákon** pro $\oplus$).
2. Pro každé $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}$ (**asociativní zákon** pro $\oplus$).
3. Existuje $\vec{b} \in V$ takové, že pro každé $\vec{a} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{a}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme **nulovým** a značíme $\vec{0}$).
4. Pro každé $\vec{a} \in V$ existuje $\vec{b} \in V$ takové, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{0}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme **opačným** k vektoru $\vec{a}$ a značíme $-\vec{a}$).
5. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí, že $(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a})$ (**asociativní zákon** pro $\odot$).
6. Pro každé $\vec{a} \in V$ platí, že $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$.
7. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí, že $(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a})$ (**distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel).
8. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí, že $\alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b})$ (**distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů).

Poznamenejme, že asociativita $\odot$ není asociativitou v pravém slova smyslu. Má totiž jít o vlastnost jedné binární operace na dané množině, zatímco zde se míchají dvě různé operace, a to násobení čísel a násobení vektoru číslem. Podobně distributivita $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel ani vzhledem ke sčítání vektorů není pravá distributivita. Ta má svazovat dvě binární operace na téže množině.

Poznámka 2.7. Znovu zdůrazněme, že vektorový prostor je řádně definován, jsou-li dány čtyři objekty:

- (a) neprázdná množina vektorů V ,⁹
- (b) číselné těleso T ,
- (c) operace $\oplus$,
- (d) operace $\odot$.

Zároveň musejí být samozřejmě splněny všechny axiomy. Někdy vektorový prostor značíme podrobněji $(V, T, \oplus, \odot)$.

Poznámka 2.8. V případě $T = \mathbb{R}$ hovoříme o **reálném vektorovém prostoru** a v případě $T = \mathbb{C}$ o **komplexním vektorovém prostoru**.

⁹Objevuje se i značení $\mathbb{V}$ nebo $\mathcal{V}$ a častý je i název lineární prostor.

V definici jsme důsledně rozlišovali operace $\oplus$ pro sčítání vektorů, $+$ pro sčítání čísel, $\odot$ pro násobení vektoru číslem, $\cdot$ pro násobení čísel. V dalším textu už obvykle nebudeme rozlišovat mezi symboly $\oplus$ a $+$. Z kontextu bude totiž vždy jasné, zda jde o sčítání ve V , nebo v T . Dále nebudeme rozlišovat mezi symboly $\odot$ a $\cdot$, ba dokonce je obvykle budeme vynechávat. Je-li $\alpha, \beta \in T$ a $\vec{a} \in V$, potom budeme často psát $\alpha\beta$ místo $\alpha \cdot \beta$ a $\alpha\vec{a}$ místo $\alpha \odot \vec{a}$. Symbol ponecháme pouze tam, kde usnadní pochopení.

Poznámka 2.9. Prvky tělesa budeme značit obvykle (ne však výlučně) řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ a vektory obvykle písmeny ze začátku a konce abecedy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.¹⁰ Šipku nad vektory vynecháme jen výjimečně, například v případech vektorů z prostoru polynomů, matic či lineárních zobrazení, kde se ustálilo jiné značení.

Věta 2.10 (Vlastnosti vektorového prostoru). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Potom platí:*

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor $\vec{0}$.
2. Ke každému vektoru $z V$ existuje právě jeden opačný vektor.
3. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ existuje právě jedno řešení rovnice $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, a to $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$.
4. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí:

$$\alpha\vec{0} = \vec{0} = 0\vec{a}.$$

5. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí implikace:

$$\alpha\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0).$$

6. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí:

$$-(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a}).$$

Důkaz. ★

1. Podle třetího axiomu obsahuje V nulový vektor $\vec{0}$. Pokud $\vec{z} \in V$ také splňuje vlastnosti nulového vektoru, potom dostáváme užitím axiomů vektorového prostoru:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \vec{z} + \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)} \\ &= \vec{0} + \vec{z} && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru).} \end{aligned}$$

¹⁰V literatuře i během studia se setkáte s rozmanitým značením vektorů: kromě $\vec{x}$ také $x, \bar{x}, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$ atd.

2. Necht $\vec{a}$ je libovolný vektor z V . Podle čtvrtého axiomu k němu existuje opačný vektor $-\vec{a}$. Pokud $\vec{b} \in V$ také splňuje vlastnosti vektoru opačného k $\vec{a}$, pak máme:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \vec{b} + \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)} \\ &= \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{a})) && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)} \\ &= (\vec{b} + \vec{a}) + (-\vec{a}) && \text{(druhý axiom – asociativní zákon)} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= \vec{0} + (-\vec{a}) && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)} \\ &= (-\vec{a}) + \vec{0} && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= -\vec{a} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)}.\end{aligned}$$

3. Nejprve se přesvědčíme, že $-\vec{a} + \vec{b}$ je řešením:

$$\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}.$$

Pokud $\vec{y} \in V$ je také řešením, potom získáváme:

$$\begin{aligned}-\vec{a} + \vec{b} &= -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{y}) && (\vec{y} \text{ je řešením}) \\ &= (-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{y} && \text{(druhý axiom – asociativní zákon)} \\ &= (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{y} && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= \vec{0} + \vec{y} && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)} \\ &= \vec{y} + \vec{0} && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= \vec{y} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)}.\end{aligned}$$

4. Z předchozího bodu víme, že pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ má rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \alpha\vec{a}$ jediné řešení, a to $\vec{x} = \vec{0}$. Ověřme, že také $\alpha\vec{0}$ a $0\vec{a}$ jsou řešeními. Poté bude jasné, že jsou rovny $\vec{0}$.

$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{0} \stackrel{(a)}{=} \alpha(\vec{a} + \vec{0}) \stackrel{(b)}{=} \alpha\vec{a}.$$

$$\alpha\vec{a} + 0\vec{a} \stackrel{(c)}{=} (\alpha + 0)\vec{a} = \alpha\vec{a}.$$

Využili jsme (a) osmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů, (b) třetí axiom – o nulovém vektoru, (c) sedmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel.

5. Necht $\alpha\vec{a} = \vec{0}$. Podle čtvrtého bodu může být $\alpha = 0$. Když je $\alpha \neq 0$, pak platí:

$$\vec{a} \stackrel{(a)}{=} 1\vec{a} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\vec{a} \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{\alpha}\vec{0} \stackrel{(d)}{=} \vec{0}.$$

Využili jsme (a) šestý axiom, (b) pátý axiom – asociativní zákon pro $\odot$, (c) předpoklad, že $\alpha\vec{a} = \vec{0}$, (d) už dokázaný čtvrtý bod.

6. Ze třetího bodu plyne, že rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ má jediné řešení, a to $\vec{x} = -(\alpha\vec{a})$. Ověříme-li, že také $(-\alpha)\vec{a}$ a $\alpha(-\vec{a})$ jsou řešeními, potom bude jasné, že jsou rovny $-(\alpha\vec{a})$.

$$\alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} \stackrel{(a)}{=} (\alpha + (-\alpha))\vec{a} = 0\vec{a} \stackrel{(b)}{=} \vec{0}.$$

$$\alpha\vec{a} + \alpha(-\vec{a}) \stackrel{(c)}{=} \alpha(\vec{a} + (-\vec{a})) \stackrel{(d)}{=} \alpha\vec{0} \stackrel{(e)}{=} \vec{0}.$$

Využili jsme (a) sedmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel, (b) už dokázaný čtvrtý bod, (c) osmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů, (d) čtvrtý axiom – o opačném vektoru, (e) čtvrtý bod. $\square$

Důkaz věty 2.10 se asi v první chvíli zdá obtížný, ale není třeba se lekat. Úkolem prvního semestru je naučit studenty dokazovací techniky a v jeho průběhu už bude zřejmé, že důkazy v lineární algebře jsou bez triků, přímočaré, a tudíž vlastně velmi jednoduché.

Poznámka 2.11. Až z věty 2.10 plyne, že mělo smysl zavést speciální symbol pro nulový a opačný vektor, protože jsou to jedinečné objekty.

Důsledek 2.12. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$. Nechť V_1 je neprázdná podmnožina V . Nechť jsou navíc splněny následující dvě podmínky:*

1. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ je $\vec{x} \oplus \vec{y} \in V_1$.*
2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_1$ je $\alpha \odot \vec{x} \in V_1$.*

Potom V_1 je také vektorovým prostorem nad tělesem T (při zúžení operací $\oplus$ na $V_1 \times V_1$ a $\odot$ na $T \times V_1$).

Důkaz. Množina V_1 je podle předpokladů neprázdná a uzavřená na operace. Zbývá ověřit axiomy:

- Ve V_1 existuje nulový vektor: Ukažme, že nulový vektor $\vec{0}$ z V hraje roli nulového vektoru ve V_1 . Vezmeme libovolný vektor $\vec{x} \in V_1 \subset V$. Poté s využitím čtvrtého bodu věty 2.10 máme $\vec{0} = 0\vec{x}$ a z uzavřenosti V_1 na násobení číslem dostáváme $0\vec{x} \in V_1$. Proto $\vec{0}$ patří do V_1 . Jelikož rovnost $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ platí pro všechny vektory $\vec{a} \in V$, platí také pro všechny vektory $\vec{a} \in V_1 \subset V$. Podle definice 2.6 je tedy $\vec{0}$ nulovým vektorem ve V_1 .
- Ke každému vektoru $\vec{x} \in V_1$ existuje ve V_1 opačný vektor: Ukažme, že opačný vektor $-\vec{x}$ z V hraje roli opačného vektoru k $\vec{x}$ ve V_1 . Podle šestého bodu věty 2.10 a uzavřenosti V_1 na násobení číslem platí, že $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in V_1$. Protože $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$, je $-\vec{x}$ podle definice 2.6 opačným vektorem k $\vec{x}$ ve V_1 .
- Všechny ostatní axiomy platí pro všechny vektory z V , tím spíše platí i pro všechny vektory z $V_1 \subset V$. $\square$

Poznámka 2.13. Posvitme si na problém, kolik vektorů může obsahovat vektorový prostor. Jistě obsahuje alespoň jeden vektor $\vec{x}$, protože předpokládáme neprázdnot V . Může obsahovat pouze jeden vektor? Ano. Definujeme-li operace $\vec{x} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\alpha\vec{x} = \vec{x}$ pro každé $\alpha \in T$, pak $V = \{\vec{x}\}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T . Vektor $\vec{x}$ ve V hraje úlohu nulového vektoru, proto můžeme psát $V = \{\vec{0}\}$. Tento prostor nazýváme **nulovým vektorovým prostorem**.

Může mít nenulový vektorový prostor konečný počet vektorů? Nemůže. Existuje-li ve V vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, potom také $2\vec{x}, 3\vec{x}, 4\vec{x}, \dots$ patří do V . Tyto vektory jsou vzájemně různé, protože pro $m \neq n$ platí podle věty 2.10, že $m\vec{x} - n\vec{x} = (m - n)\vec{x} \neq \vec{0}$.

2.2 Příklady vektorových prostorů

Příklad 2.14.

- Nechť T je těleso.
- Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $V = T^n$, kde T^n je množina uspořádaných n -tic čísel z tělesa zapsaných do sloupců, tj.

$$T^n := \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\}.^{11}$$

Číslo a_i nazýváme i -tou **složkou** vektoru $\vec{a}$.¹²

- Operaci sčítání definujeme „po složkách“:

$$\text{Pro každé } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ a } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ definujeme } \vec{a} \oplus \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

- Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po složkách“:

$$\text{Pro každé } \alpha \in T \text{ a každé } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ definujeme } \alpha \odot \vec{a} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}.$$

- Úlohu nulového vektoru hraje vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

¹¹Ovšem zhruba polovina matematiků dává přednost řádkovému zápisu vektorů z T^n .

¹²Pro označení i -té složky vektoru $\vec{a}$ se používá též a^i nebo $a^{(i)}$.

- Opačným vektorem k $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ je vektor $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$.

Necháme na čtenáři, aby sám ukázal, že T^n nad T s operacemi definovanými po složkách splní všechny axiomy, tedy jde o vektorový prostor.¹³

Poznámka 2.15. Značení T^n používáme jak pro množinu uspořádaných n -tic čísel z tělesa, tak pro vektorový prostor T^n , tj. čtveřici $(T^n, T, \oplus, \odot)$. Je třeba podle kontextu rozlišit, o který případ jde.

V zápisu vektorů z prostoru T^n nepanuje jednotnost. My se budeme držet sloupcového zápisu, ale zavzpomínejme zde na asistenta Pytlíčka, který byl skalním přívržencem vektorů zapsaných do řádků. Na jednom cvičení z LAP tak nějaký student začal psát vektory se šipkami a do sloupců a v průběhu příkladu chtěl přejít ke značení používanému panem asistentem (tedy bez šipek a do řádků). Ten ho ale napomenul: „Jak známo, tak já šipky nesnáším. Ale když už jste to začal psát se šipečkami a do sloupečků, no tak to tak musíte psát pořád.“ Budiž čtenáři poučením, že udělá jediné dobře, když i ve svém značení bude především konzistentní.

Příklad 2.16.

- Nechť T je těleso.
- Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Položme $V = T^{m,n}$, kde $T^{m,n}$ je množina uspořádaných mn -tic čísel z T zapsaných do tabulky o m řádcích a n sloupcích a nazývaných **maticemi** typu $m \times n$,¹⁴ tj.

$$T^{m,n} := \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in T \text{ pro každé } i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n} \right\}.$$

Čísla a_{ij} nazýváme **prvky** matice $\mathbb{A}$ (značíme také $\mathbb{A}_{ij}$ nebo $[\mathbb{A}]_{ij}$), i -tým **řádkem** matice $\mathbb{A}$ nazveme n -tici $\mathbb{A}_{i\bullet} := (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ a j -tým **sloupcem** matice $\mathbb{A}$ m -tici

$$\mathbb{A}_{\bullet j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \text{ Číslo } i \text{ říkáme } \textbf{řádkový} \text{ a číslo } j \textbf{ sloupcový index} \text{ prvku } a_{ij}.^{15}$$

¹³Vektorový prostor T^n se také nazývá aritmetický.

¹⁴Někdy se též píše typu (m, n) nebo m/n .

¹⁵Matice se značí například i $\mathbf{A}$ nebo jednoduše A . Pro i -tý řádek a j -tý sloupec matice $\mathbb{A}$ se též používá symbol $\mathbf{r}_i(\mathbb{A})$ a $\mathbf{s}_j(\mathbb{A})$.

- Operaci sčítání definujeme „po prvcích“:

Pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n}$ definujeme

$$[\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}]_{ij} := \mathbb{A}_{ij} + \mathbb{B}_{ij}.$$

- Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po prvcích“:

Pro každé $\alpha \in T$ a $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n}$ definujeme

$$[\alpha \odot \mathbb{A}]_{ij} := \alpha \cdot \mathbb{A}_{ij}.$$

- Úlohu nulového vektoru hraje **nulová matice** $\mathbb{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

- Opačným vektorem k $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je $-\mathbb{A} := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Snadno ověříme, že čtveřice $(T^{m,n}, T, \oplus, \odot)$ splní všechny axiomy. Vidíme tudíž, že $T^{m,n}$ nad T s operacemi definovanými po prvcích je vektorový prostor. Nazýváme jej **prostorem matic** (o m řádcích a n sloupcích).

Poznámka 2.17. Značení $T^{m,n}$ používáme pro množinu matic o m řádcích a n sloupcích s prvky z tělesa i pro vektorový prostor $T^{m,n}$, tedy čtveřici $(T^{m,n}, T, \oplus, \odot)$. Je opět třeba podle kontextu rozlišit, o který případ jde.

Úkol 2.18. Rozmyslete si, že prostory T^n a $T^{n,1}$ jsou totožné.

Pojem matice je v lineární algebře velmi důležitý. Podstatnou část lineární algebry bude tvořit maticový počet. Prozatím vystačíme s maticí jakožto vektorem z $T^{m,n}$. V budoucnu pak zavedeme pro matice i operaci násobení a zejména v letním semestru budeme vyšetřovat různé další vlastnosti matic.

Příklad 2.19. K pochopení tohoto příkladu je vhodné si přečíst Dodatek 1: Polynomy.

- Vezměme těleso $\mathbb{C}$.
- Necht $V = \mathcal{P}$, což je množina všech polynomů.
- Operaci sčítání vektorů definujeme jako sčítání funkcí, tj. „bodově“:
Pro každé $p, q \in \mathcal{P}$ definujeme $(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
- Operaci násobení vektoru číslem definujeme jako násobek funkce, tj. „bodově“:
Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathcal{P}$ definujeme $(\alpha \odot p)(t) := \alpha \cdot p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

- Úlohu nulového vektoru hraje nulový polynom $\mathcal{O}$ definovaný $\mathcal{O}(t) := 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
- Opačným vektorem k $p \in \mathcal{P}$ je opačný polynom definovaný $(-p)(t) := -p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Čtenář ověří, že čtveřice $(\mathcal{P}, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ splní všechny axiomy. Tedy $\mathcal{P}$ nad $\mathbb{C}$ s operacemi definovanými bodově je vektorový prostor. Nazýváme jej **prostorem polynomů**.

Příklad 2.20. Ponechme vše definované stejně jako v prostoru polynomů, pouze změňme množinu V . Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $V = \mathcal{P}_n$, což je množina polynomů stupně maximálně $n - 1$ s přidáním nulového polynomu (který nemá stupeň definovaný). Opět ponecháme k ověření čtenáři, že $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Radíme využít důsledku 2.12.

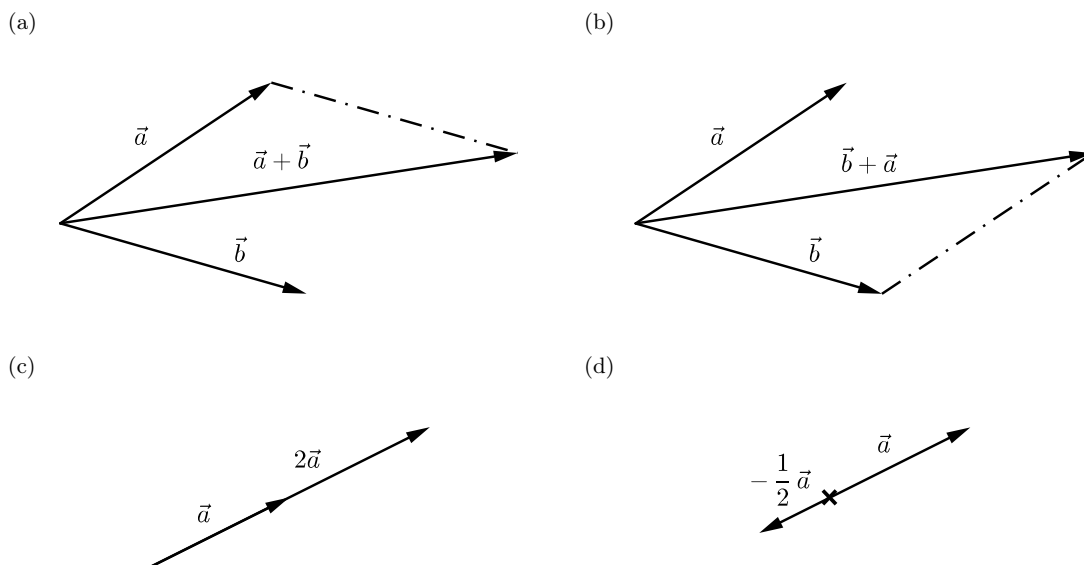
V lineární algebře nás nečeká přehnaně mnoho termínů. Naučte se tedy názvosloví správně používat. Rozhodně není na škodu pilovat přesnost vyjadřování, zlepšuje se tím i schopnost úsporně a exaktně formulovat myšlenky. I pan asistent Pytlíček na takovou přesnost dbal. Kdo říkal složka matice nebo prvek vektoru, „vůbec do toho neviděl“!

Příklad 2.21. Pro znázornění prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ budeme používat orientované šipky. Vysvětleme vizualizaci $\mathbb{R}^2$, v $\mathbb{R}^3$ postupujeme analogicky.

- Tělesem jsou reálná čísla.
- Vektoru $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ odpovídá šipka začínající v počátku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a končící v bodě $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Takové šipce se někdy říká **průvodič** bodu $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
- Součet $\vec{a} + \vec{b}$ získáme, když do koncového bodu šipky odpovídající $\vec{a}$ umístíme počátek šipky rovnoběžné s šipkou odpovídající $\vec{b}$ a mající stejnou velikost jako šipka odpovídající $\vec{b}$. Tím získáme koncový bod šipky odpovídající $\vec{a} + \vec{b}$. Je zřejmé, že takové sčítání odpovídá sčítání vektorů po složkách, jak jsme je zavedli ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$.
- Vektor $\alpha \vec{a}$ získáme tak, že velikost šipky odpovídající $\vec{a}$ vynásobíme $|\alpha|$. Poté šipku umístíme do počátku a orientaci nezměníme, pokud $\alpha \geq 0$, nebo změníme na opačnou, pokud $\alpha < 0$.

Čtenář si rozmyslí, čemu odpovídají při této vizualizaci axiomy. Komutativní zákon ilustruje první a druhý bod obrázku 1.

Poznámka 2.22. Je lehké nahlédnout, že platí tvrzení: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť T_1 je těleso splňující $T_1 \subset T$. Potom V je při zachování operace



Obrázek 1: (a) Součet vektorů $\vec{a} + \vec{b}$. (b) Součet vektorů $\vec{b} + \vec{a}$. (c) $2\vec{a}$. (d) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

$\oplus$ a zúžení operace $\odot$ na $T_1 \times V$ také vektorovým prostorem nad T_1 . Například $\mathbb{C}^n$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pokud jsou operace definovány po složkách. Jde ovšem o jiný vektorový prostor než $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$. Pozor! Naopak to neplatí. Například $\mathbb{R}^n$ při operacích definovaných po složkách netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

2.3 Lineární kombinace vektorů

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Zavedeme symbol pro součet n vektorů:

$$\sum_{i=1}^n \vec{x}_i := \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n.$$

Nepíšeme závorky, protože – jak si čtenář sám ověří – podle komutativního a asociativního zákona pro sčítání vektorů platí, že nezáleží na uzavřování ani na pořadí vektorů v sumě. Výsledkem součtu je opět vektor z V , jak plyne z uzavřenosti V na sčítání vektorů.

Definice 2.23. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Říkáme, že vektor $\vec{x} \in V$ je **lineární kombinací** (LK) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Čísla α_i pro $i \in \hat{n}$ nazýváme **koeficienty LK**.

- Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$, nazýváme takovou LK **triviální**.
- V opačném případě (tj. když existuje nenulový koeficient) jde o **netriviální** LK.

Je zřejmé, že výsledkem triviální LK je nulový vektor.

Definice 2.24. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Množinu všech LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárním obalem** (LO) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ a značíme ji $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$,¹⁶ tj.

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \mid \text{pro každé } i \in \hat{n} \text{ je } \alpha_i \in T \right\}.$$

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory LO**.

Věta 2.25 (Vlastnosti LO). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Potom platí:*

1. $\vec{0} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
2. Jestliže $(k_1 k_2 \dots k_n)$ je permutace množiny $\hat{n}$, potom

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \dots, \vec{x}_{k_n}]_\lambda.$$

Slovy: „LO nezávisí na pořadí generátorů.“

3. Pokud $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak platí, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
Slovy: „Generátor, který je LK ostatních generátorů, lze z LO vyhodit nebo jej do LO přidat, aniž by se LO změnil.“
4. Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
Slovy: „LO je uzavřený na sčítání vektorů.“
5. Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
Slovy: „LO je uzavřený na násobení vektoru číslem z T .“
6. $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T při zúžení operací z V .

Důkaz.

1. Vyplývá z rovnosti $\vec{0} = \sum_{i=1}^n 0\vec{x}_i$.

¹⁶V literatuře se objevují pro LO i symboly $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$, $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}_{\text{lin}}$ nebo $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. V anglických textech se pak setkáme nejčastěji se symbolem $\text{span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, přičemž překlad span do češtiny zní rozsah, rozpětí.

2. Tvrzení plyne z rovnosti:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$

tedy z faktu, že v sumě nezáleží na pořadí vektorů.

3. Rovnost dvou množin se v matematice obvykle dokazuje tak, že se dokáží dvě inkluze. Budeme postupovat také tak.

- Dokážeme nejprve, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom podle definice LO existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom ale také platí, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + 0\vec{x}_{n+1}$, a to opět podle definice LO znamená, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
- Zbývá dokázat, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$. Upravme rovnost následovně:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1}.$$

Teprve nyní využijeme předpoklad, že $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. To podle definice LO znamená, že existují čísla $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in T$ taková, že $\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Odtud upravíme dále předcházející rovnost:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_{n+1} \beta_i) \vec{x}_i.$$

V poslední úpravě jsme využili axiomu vektorového prostoru. Podle definice LO vidíme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

4. Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in T$ tak, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \quad \text{a} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme díky axiomům vektorového prostoru:

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

5. Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Poté platí podle axiomů vektorového prostoru:

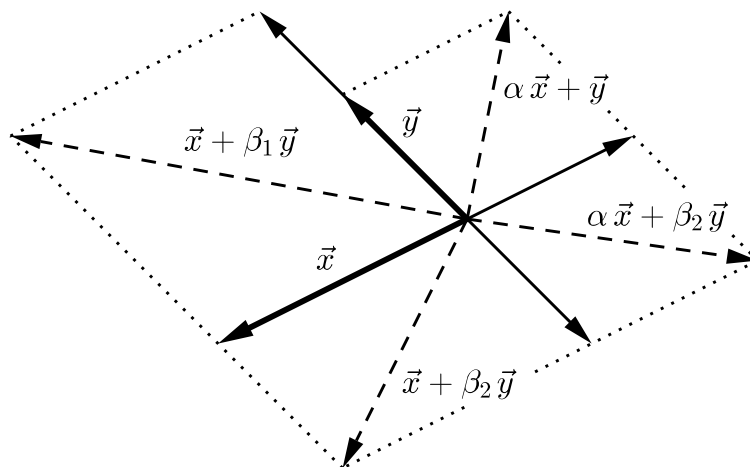
$$\alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

6. Z předchozích dvou bodů víme, že LO je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem z T při zúžení operací z V . Tvrzení pak plyne z důsledku 2.12. $\square$

Příklad 2.26. Podívejme se, jak vypadají LO v $\mathbb{R}^2$.

- (a) $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ je jediný bod $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (b) $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$, je přímka. Obsahuje totiž právě všechny možné reálné násobky vektoru $\vec{x}$.
- (c) $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $\vec{x}$ a $\vec{y}$ neleží v jedné přímce, je celá rovina $\mathbb{R}^2$. K získání představy, že každý vektor z $\mathbb{R}^2$ lze psát jako LK vektorů $\vec{x}, \vec{y}$, použijeme vizualizaci $\mathbb{R}^2$ pomocí šipek. Viz obrázek 2.



Obrázek 2: Ukázka, jak různé vektory z $\mathbb{R}^2$ získáváme jako LK vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

2.4 Lineární závislost a nezávislost

Definice 2.27. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T .

- Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou **lineárně nezávislé** (LN), pokud

$$(\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T) \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \right) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right).$$

Slovy: „LN znamená, že jediné triviální LK vektorů dává nulový vektor.“

- Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou **lineárně závislé** (LZ) v opačném případě, tj. pokud platí negace předchozího výroku:

$$(\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T) \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \right) \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0) \right).$$

Slovy: „LZ znamená, že existuje netriviální LK vektorů rovná nulovému vektoru.“

Věta 2.28 (Vlastnosti LN a LZ vektorů). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Potom platí:*

1. Vektor $\vec{x}_1$ je LZ, právě když $\vec{x}_1 = \vec{0}$.
2. Pokud je mezi vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ obsažen $\vec{0}$, pak jsou LZ.
3. Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$, pak i vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ.

Slovy: „Přidáme-li mezi LZ vektory další vektory, zůstanou LZ.“

4. Pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN, potom pro každé $k \in \hat{n}$ platí, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN.

Slovy: „Ponecháme-li z LN vektorů jen některé, zůstanou LN.“

5. „Alternativní definice LZ pro více vektorů“

Nechť $n \geq 2$.

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ $\Leftrightarrow (\exists i_0 \in \hat{n})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$.

Slovy: „Mezi alespoň dvěma LZ vektory existuje vektor, který je LK ostatních.“

6. „Alternativní definice LZ“

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ $\Leftrightarrow (\vec{x}_1 = \vec{0}) \vee (\exists i_0 \in \{2, \dots, n\})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda)$.

Slovy: „Očíslujeme-li LZ vektory, pak je buď první vektor nulový, nebo existuje vektor, který je LK předchozích.“

Důkaz.

1. Vektor $\vec{x}_1$ je LZ $\Leftrightarrow$ existuje $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, takové, že $\alpha \vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{0}$. Přičemž v poslední ekvivalenci je využít čtvrtý a pátý bod věty 2.10.
2. Nechť $\vec{x}_i = \vec{0}$ pro nějaké $i \in \hat{n}$, potom tvrzení plyne z rovnosti:

$$\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_n,$$

tedy z faktu, že $\vec{0}$ dostaneme jako netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

3. Necht jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$. Pak existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ tak, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a alespoň jedno α_i je nenulové. Potom ale také platí, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n 0 \vec{x}_i$, což je netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ dávající $\vec{0}$. Tudíž jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ také LZ.
4. Toto tvrzení plyne z předchozího užitím faktu, že když platí implikace $A \Rightarrow B$, tak platí také implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$.
5. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

- $(\Rightarrow)$: Předpokládáme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ, tudíž podle definice existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové (označme ho α_{i_0}) a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Odtud dostaneme:

$$\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = - \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

A na závěr máme:

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i.$$

Tedy podle definice LO dostáváme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

- $(\Leftarrow)$: Předpokládáme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme $\sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \vec{x}_i - 1 \vec{x}_{i_0} = \vec{0}$, což je netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ rovná $\vec{0}$, proto jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LZ.

6. Opět dokazujeme dvě implikace.

- $(\Rightarrow)$: Necht jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LZ. Pak samozřejmě $\vec{x}_1$ může být nulový. Ošetřeme ještě případ, kdy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Potom z definice LZ plyne, že existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$ a alespoň jedno z čísel je nenulové. Označme $i_0 = \max\{i \in \hat{n} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Množina vpravo je neprázdná, protože alespoň jedno z čísel α_i je nenulové. Navíc $i_0 \geq 2$. Kdyby totiž $i_0 = 1$, potom by $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$. To by byl spor s větou 2.10, podle které plyne z nenulovosti $\vec{x}_1$, že $\alpha_1 = 0$. Odtud dostáváme $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \vec{x}_i$. Dále máme $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = - \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ a na závěr $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i$. To podle definice LO znamená, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda$.

- ($\Leftarrow$): Necht $\vec{x}_1 = \vec{0}$, poté podle druhého bodu této věty jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LZ. Druhá možnost je, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ pro nějaké $i_0 \geq 2$. Pak platí:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i + (-1) \vec{x}_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^n 0 \vec{x}_i.$$

Našli jsme netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ dávající nulový vektor. Proto jsou tyto vektory LZ. $\square$

Úkol 2.29. Rozmyslete si, že dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou LZ, právě když

$$(\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha \vec{y} \vee \vec{y} = \alpha \vec{x}).$$

2.5 Báze a dimenze

Definice 2.30. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T . Necht $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory** V a říkáme, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ **generují** V .

Poznámka 2.31. V případě LO už jsme generátory zaváděli, nazývali jsme tak pro LO $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Nyní vidíme, že chápeme-li LO jako vektorový prostor, pak jsme v souladu s novou definicí.

Na rozdíl od definice LK, LO, LN a LZ vektorů a definice generátorů, kde nezáleželo na pořadí vektorů, budeme potřebovat při definici báze vektory uspořádat. Zavedeme proto pojem soubor.¹⁷

Definice 2.32. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Necht $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V . Uspořádanou n -tici $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme **souborem** (n -členným) ve V .

Poznámka 2.33. Ujasněme si řádně rozdíl mezi pojmy soubor a množina vektorů. Zatímco soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je uspořádaná n -tice vektorů (členy souboru se mohou opakovat a záleží na jejich pořadí), v množině vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ se prvky neopakují a na jejich pořadí nezáleží.

Příklad 2.34. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$, potom

$$\begin{aligned} & \bullet \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \\ & \bullet \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

¹⁷V literatuře se také vyskytuje název skupina, soustava nebo konečná posloupnost vektorů.

Definice 2.35. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ z V splňují dvě podmínky:

1. Jsou LN.
2. Generují V .

Potom soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme **bází** V .

Poznámka 2.36. Místo spojení „soubor LN vektorů“ budeme častěji používat „LN soubor“. Podobně v případě lineární závislosti.

Poznámka 2.37. $V = \{\vec{0}\}$ bázi nemá, protože v něm neexistuje LN vektor.

Příklad 2.38. Rozhodněte o LN či LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ z $\mathbb{R}^4$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zjišťujeme, zda rovnice $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \alpha_4 \vec{x}_4 = \vec{0}$ má jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (pak jsou vektory podle definice LN), nebo zda existuje netriviální řešení (potom jsou LZ). Řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má samé hlavní sloupce. Z kapitoly Soustavy lineárních algebraických rovnic poté víme, že v takovém případě existuje jen triviální řešení

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dokázali jsme tak, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ jsou LN. Označme $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$. (Z teorie víme, že jde o vektorový prostor.) Potom je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ soubor LN generátorů V , proto je bází V . Jelikož v bázi záleží na pořadí, je například soubor $(\vec{x}_4, \vec{x}_3, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ jinou bází V .

Příklad 2.39. Rozhodněte o LN či LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ z $\mathbb{R}^4$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Tentokrát řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 1\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice v horním stupňovitém tvaru má poslední sloupec vedlejší. Z kapitoly Soustavy lineárních algebraických rovnic pak víme, že netriviální řešení získáme, když za neznámou odpovídající vedlejšímu sloupci zvolíme nenulové číslo, například $\alpha_4 = 1$, a ostatní neznámé dopočítáme. Dostáváme $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = -1$. To jest:

$$(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}.$$

Tedy máme netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ rovnou $\vec{0}$, což znamená, že jsou LZ. Ze vztahu $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$ dále vidíme, že $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$, tudíž podle třetí vlastnosti LO máme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Označme $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$. Vyškrtneme-li z výše uvedené matice soustavy poslední sloupec, vidíme, že po ekvivalentních řádkových úpravách zůstanou v matici v horním stupňovitém tvaru pouze hlavní sloupce. Zjišťujeme tudíž, že je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ soubor LN generátorů V , proto je to báze V .

Dalším důležitým pojmem je dimenze, která (jak uvidíme zanedlouho) s bází úzce souvisí.

Definice 2.40. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $V \neq \{\vec{0}\}$. Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že jsou splněny dvě podmínky:

1. ve V existuje n LN vektorů,
2. každých $(n + 1)$ vektorů z V je LZ.

Potom říkáme, že **dimenze** V je konečná a rovna n a píšeme $\dim V = n$. V opačném případě říkáme, že dimenze V je nekonečná a píšeme $\dim V = +\infty$. Pro nulový vektorový prostor klademe $\dim V = 0$.

Poznámka 2.41. Rozeberme, kdy je $\dim V = +\infty$, tj. kdy V nemá konečnou dimenzi. Opačný případ ve výše uvedené definici znamená negaci výroku, to jest: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ve V buď každých n vektorů LZ, nebo existuje $(n + 1)$ LN vektorů. Jelikož $V \neq \{\vec{0}\}$, je jasné, že ne každý vektor z V je LZ. Potom ale, má-li negace výroku platit, dostáváme, že musejí existovat dva LN vektory ve V . Poté protože ne každé dva vektory jsou LZ, dostáváme, že existují tři LN vektory atd. Neboli nekonečná dimenze znamená, že ve V pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n LN vektorů.

Příklad 2.42. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^4$. Nechť

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Protože V je LO, jde o vektorový prostor. Je zřejmé, že soubor

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

je jeho bází, protože vektory v souboru jsou LN generátory V . Jelikož ve V existují tři LN vektory, víme zatím, že $\dim V \geq 3$. Abychom dokázali, že $\dim V = 3$, museli bychom ověřit, že každé čtyři vektory z V jsou LZ. Následující věta nám tuto práci ušetří.¹⁸

Věta 2.43 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T . Nechť dále $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou vektory z V splňující pro každé $i \in \hat{n}$:*

$$\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_{\lambda}.$$

Pak platí:

¹⁸Ernst Steinitz (1871–1928), německý matematik. Slavná věta o výměně by se možná měla spíše jmenovat Grassmannova, protože Grassmann ji zmiňoval již ve svém díle *Ausdehnungslehre* roku 1844. Práce se ale nestala známou, proto ji Steinitz necituje a větu znovu vyslovuje a dokazuje roku 1913.

1. $m \geq n$,
2. existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_n \in \widehat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\})]_\lambda.$$

Důkaz. ★ Označme $L = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.

- Protože $\vec{x}_1 \in L$, plyne z věty 2.25 o vlastnostech LO, že

$$L = [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda.$$

Dále podle pátého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ pro více vektorů) platí, že $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou LZ vektory. Šestý bod věty 2.28 (alternativní definice LZ) potom říká, že některý z y -ových vektorů je LK předchozích (využili jsme faktu, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, protože je vybráný z LN vektorů), tj. existuje index $i_1 \in \widehat{m}$ takový, že $\vec{y}_{i_1} \in [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{i_1-1}]_\lambda$. Odtud podle věty 2.25 plyne, že $\vec{y}_{i_1}$ lze z $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil, tedy $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. Dostáváme tak kýženou rovnost:

$$L = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda.$$

Tudíž jsme nahradili jeden vektor z původních vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ vektorem $\vec{x}_1$. Je-li $n = 1$, je důkaz hotov.

- Je-li $n \geq 2$, pak nutně $m \geq 2$. Jinak bychom měli $L = [\vec{x}_1]_\lambda$ a $\vec{x}_2 \in L$, což by byl spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2$. Pro $n \geq 2$ pokračujeme dál ve výměně. Opět fakt, že $\vec{x}_2 \in L$, implikuje jednak rovnost $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda$, jednak LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})$. Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou LN. Nutně proto platí, že $\vec{x}_2 \notin [\vec{x}_1]_\lambda$. Šestý bod věty 2.28 vynucuje tudíž existenci indexu $i_2 \in \widehat{m} - \{i_1\}$ tak, že $\vec{y}_{i_2}$ lze nakombinovat z předchozích vektorů v posloupnosti $\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})$. Díky tomu z věty 2.25 plyne, že $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1, i_2\})]_\lambda$. Ve druhém kroku jsme tak nahradili vektorem $\vec{x}_2$ další z původních generátorů prostoru L .
- Tak pokračujeme dál, dokud nevyčerpáme všechny vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nebo všechny vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$. Ukažme, že případ, kdy bychom vyčerpali všechny y -ové vektory a zároveň nevyčerpali všechny x -ové, nemůže nastat. Kdyby totiž $m < n$, potom bychom po m -tém kroku dostali $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$. Zároveň by ale zbýval vektor $\vec{x}_{m+1}$, který by podle předpokladu splňoval $\vec{x}_{m+1} \in L$. To by byl spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}$. Proto nutně $m \geq n$ a můžeme provést právě n kroků. Po n -tém kroku máme:

$$L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\})]_\lambda. \quad \square$$

Poznámka 2.44.

- Z prvního bodu Steinitzovy věty plyne, že počet LN vektorů ve vektorovém prostoru nepřekročí počet generátorů tohoto prostoru.
- Druhý bod věty říká, že v LO existují generátory, které lze nahradit danými LN vektory, proto věta o výměně. Věta ale neříká, které z generátorů máme vyhodit.

Příklad 2.45. Návrat k příkladu v $\mathbb{R}^4$, kde vyšetřujeme dimenzi $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Již víme, že $\dim V \geq 3$. Jelikož V je generovaný třemi vektory, Steinitzova věta tvrdí, že ve V existují nejvýše tři LN vektory. Tudíž každé čtyři vektory ve V jsou LZ. To už podle definice dimenze znamená, že $\dim V = 3$.

Steinitzova věta umožňuje zavést alternativní definici dimenze, která dává do souvislosti pojem dimenze a báze.

Věta 2.46 (Alternativní definice dimenze). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak $\dim V = n$ tehdy a jen tehdy, když ve V existuje n -členná báze.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Necht $\dim V = n$, pak ve V existuje podle definice dimenze n -členný LN soubor. Označme jej $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Ukážeme, že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom bude jasné, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze.

Předpokládejme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ negenerují V , tj. ve V existuje vektor $\vec{x}_{n+1} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Užitím šestého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ) odvodíme pak LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$: Jelikož jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LN, platí, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, a pro každé $i \in \hat{n}$ platí, že $\vec{x}_i$ není LK předchozích vektorů, a zároveň ani $\vec{x}_{n+1}$ není LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ ovšem znamená spor s předpokladem, že $\dim V = n$.

- ($\Leftarrow$): Necht $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V , pak ve V existuje n LN vektorů (jelikož $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN). Protože $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou zároveň generátory V , plyne z prvního bodu Steinitzovy věty, že nejvýše n vektorů může být LN. Tudíž každých $(n+1)$ vektorů je LZ. Tím je podle definice dokázáno, že $\dim V = n$. $\square$

Důsledek 2.47 (Důsledky Steinitzovy věty). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht V je vektorový prostor nad tělesem T splňující $\dim V = n$. Pak platí:*

1. Každá báze V je n -členná.
2. Každý n -členný LN soubor ve V už je souborem generátorů V , a tedy je bází V .

3. Každý n -členný soubor generátorů V už je LN, a je tudíž bází V .

Důkaz.

1. Víme, že ve V existuje n -členná báze. Označme ji $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Uvažujme ve V ještě jinou bázi $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$. Jelikož vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou generátory V a vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou LN, je podle prvního bodu Steinitzovy věty $n \geq m$. Protože také $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou generátory V a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN, platí opět podle prvního bodu Steinitzovy věty, že také $m \geq n$.
2. Viz důkaz první implikace ve větě 2.46.
3. Pokud $n = 1$, je pravdivost výroku zřejmá. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, které generují V a zároveň jsou LZ. Z jejich LO lze pak vyhodit některý z vektorů, aniž by se LO změnil. Potom je ale V generován $n - 1$ vektory, což podle Steinitzovy věty znamená, že ve V existuje nejvýše $n - 1$ LN vektorů. Tudíž každých n vektorů je LZ, a to je spor s předpokladem, že $\dim V = n$. $\square$

Poznámka 2.48. Přemýšlivý čtenář se možná ptá, proč jsme pro definici dimenze nepoužili hned na začátku definici pomocí báze: Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Pokud $V = \{\vec{0}\}$, pak $\dim V = 0$. Pokud $V \neq \{\vec{0}\}$, pak buď ve V existuje n -členná báze a klademe $\dim V = n$, nebo báze neexistuje a klademe $\dim V = +\infty$.

Taková definice by ale potřebovala ověřit korektnost – skutečnost, že když ve V někdo najde bázi o deseti členech a prohlásí, že dimenze je deset, nestane se, že by někdo jiný našel bázi o jiném počtu členů. Fakt, že všechny báze mají stejný počet členů, se snadno ověří pomocí Steinitzovy věty. Ponecháme čtenáři k zamyšlení, jak by jej ověřil bez jejího použití. Původní definice dimenze je tudíž sice techničtější, ale nevyžaduje dodatečné ověření korektnosti.

Příklad 2.49. Uveďme, jak vypadají báze a dimenze nejznámějších vektorových prostorů.

1. V T^n nazýváme **standardní bázi**¹⁹ soubor $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde

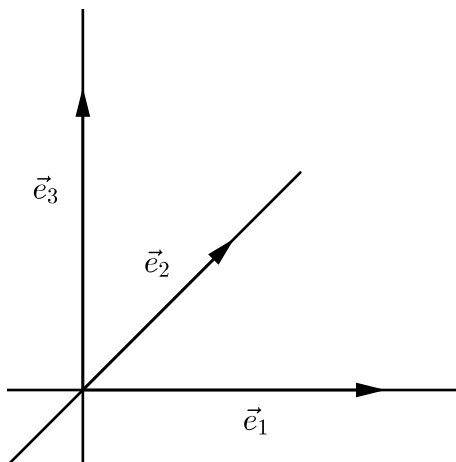
$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme-li zdůraznit počet členů báze, píšeme $\mathcal{E}_n$. Není těžké nahlédnout, že vektory

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ jsou LN. Jde o generátory, protože každý vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$ lze

¹⁹Též se používá termín kanonická báze.

psát jako $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Proto $\dim T^n = n$. Ilustrace standardní báze $\mathbb{R}^3$ je na obrázku 3.



Obrázek 3: Obvyklé – tzv. pravotočivé – znázornění standardní báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$.

2. V prostoru matic $T^{m,n}$ (o m řádcích a n sloupcích) nazýváme **standardní bázi** soubor $\mathcal{E} = (\mathbb{E}_{1,1}, \mathbb{E}_{1,2}, \dots, \mathbb{E}_{m,n})$, kde pro každé $i \in \widehat{m}$ a každé $j \in \widehat{n}$ je $\mathbb{E}_{i,j}$ matice, která má m řádků a n sloupců, prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci je roven jedné a všechny ostatní prvky jsou nulové. Tedy například $\mathbb{E}_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. Podobně jako v předchozím příkladě nahlédneme, že jde o LN generátory a je jich mn , proto $\dim T^{m,n} = mn$.
3. V prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně maximálně $n-1$ s přidáním nulového polynomu nazýváme **standardní bázi** soubor $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ jsou polynomy $e_1, e_2, \dots, e_n$ definovány:

$$e_1(t) := 1, \quad e_2(t) := t, \quad \dots, \quad e_n(t) := t^{n-1}.$$

Vysvětleme, že tyto vektory generují $\mathcal{P}_n$. Uvažujme-li libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_n$, pak existují komplexní čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = \alpha_0 e_1(t) + \alpha_1 e_2(t) + \alpha_2 e_3(t) \cdots + \alpha_{n-1} e_n(t).$$

To jest:

$$p = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \cdots + \alpha_{n-1} e_n,$$

neboli $p \in [e_1, e_2, \dots, e_n]_\lambda$. LN vektorů ověříme z definice. Předpokládáme-li, že $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n = \mathcal{O}$ (nulový polynom), znamená to, že polynom vlevo má

pro všechna $t \in \mathbb{C}$ tvar $\beta_1 + \beta_2 t + \dots + \beta_n t^{n-1}$. Jelikož jde o nulový polynom, všechny koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ jsou nutně nulové, a tím je dokázána LN. Protože má $\mathcal{P}_n$ n -člennou bázi, je $\dim \mathcal{P}_n = n$ (značení $\mathcal{P}_n$ je voleno právě tak, aby n odpovídalo dimenzi).

4. V prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů jsou pro každé n vektory $e_1, e_2, \dots, e_n$ (definované stejně jako v předchozím bodě) LN, proto $\dim \mathcal{P} = +\infty$.

Podívejme se, jak lze z báze komplexního vektorového prostoru získat bázi reálného vektorového prostoru.

Věta 2.50 (Báze nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$). ★ *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$ a nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V . Potom $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, i\vec{x}_2, \dots, i\vec{x}_n)$ je báze $V_{\mathbb{R}}$, čímž značíme V nad $\mathbb{R}$, kde je operace sčítání zachována a operace násobení zúžena na $\mathbb{R} \times V$. Tedy $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.*

Důkaz. Ověříme, že jde o LN soubor generátorů $V_{\mathbb{R}}$.

- LN: Uvažujme libovolnou LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, i\vec{x}_2, \dots, i\vec{x}_n$ s reálnými koeficienty dávající nulový vektor, tj. $\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k (i\vec{x}_k) = \vec{0}$. Pak platí:

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) \vec{x}_k = \vec{0}.$$

Z LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ve V nad $\mathbb{C}$ plyne, že $\alpha_k + i\beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$. Nulová tedy musí být reálná i imaginární část komplexních čísel $\alpha_k + i\beta_k$, tj. $\alpha_k = \beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.

- Vektory generují $V_{\mathbb{R}}$: Nechť $\vec{x} \in V$. Jelikož vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ generují V nad $\mathbb{C}$, existují čísla $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \vec{x}_k$. Rozepišme nyní komplexní čísla pomocí jejich reálné a imaginární části, tj. $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$. Poté platí:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) \vec{x}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n (i\beta_k) \vec{x}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k (i\vec{x}_k).$$

Podarilo se nám tudíž $\vec{x}$ zapsat jako LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, i\vec{x}_2, \dots, i\vec{x}_n$ pomocí reálných koeficientů. $\square$

Steinitzova věta má ještě další dva důležité důsledky. První souvisí s faktem, že báze daného prostoru je nejmenším souborem z hlediska počtu generátorů. Druhý s vlastností, že báze je největším LN souborem. Zformulujeme tyto důsledky precizně ve tvaru vět.

Věta 2.51 (Výběr báze z generátorů). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nechť $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_{\lambda} = V$. Pak existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_n \in \widehat{m}$ takové, že $(\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \dots, \vec{y}_{i_n})$ tvoří bázi V .*

Slovy: „Z generátorů nenulového prostoru lze vždy vybrat bázi.“

Důkaz. Případ $m < n$ podle Steinitzovy věty nenastává. Je-li $m = n$, potom podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty je $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bází V . Je-li $m > n$, pak jsou vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ LZ a podle pátého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ pro více vektorů) lze z $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit jeden z generátorů, aniž by se obal změnil.

Je-li $m - 1 = n$, potom je soubor získaný z původního vyhozením jednoho vektoru hledanou bází. Je-li $m - 1 > n$, pokračujeme analogicky. $\square$

Příklad 2.52. Uvažujme $\mathbb{R}^4$. Necht $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vyberte z generátorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ bází P .

Řešení: Postupujeme jako při vyšetřování LN a LZ, tedy vytvoříme matici, jejímiž sloupci jsou generátory P . Na pořadí vektorů v LO nezáleží, dáme je tudíž do matice tak, aby se nám co nejsnáze převáděla do horního stupňovitého tvaru.

$$(\vec{x}_2 \ \vec{x}_3 \ \vec{x}_1 \ \vec{x}_4) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že třetí a čtvrtý sloupec jsou vedlejší, proto jim odpovídající vektory jsou LK předchozích. Konkrétně $\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$ a $\vec{x}_4 = -\vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Proto lze vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_4$ z LO vyhodit, aniž by se změnil, tj. $P = [\vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Z matice také vidíme, že vektorům $\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3$ odpovídají hlavní sloupce, jsou proto LN a soubor $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ tvoří hledanou bází. Báze není jediná možná. Z horního stupňovitého tvaru vyčteme snadno, že například $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ nebo $(\vec{x}_2, \vec{x}_4)$ jsou také báze P .

Věta 2.53 (Doplňení LN vektorů na bází). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Necht $k \in \hat{n}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN vektory ve V . Pak existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ je bází V .*

Slovy: „LN vektory lze vždy doplnit na bází v prostoru konečné dimenze.“

Důkaz. Podle věty 2.46 (alternativní definice dimenze) v prostoru V existuje n -členná báze $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$. Užitím Steinitzovy věty (jen pozor na to, že m ze Steinitzovy věty je nyní n a n ze Steinitzovy věty je nyní k) víme, že existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{n}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \dots, i_k\})]_\lambda.$$

Jelikož soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{n} - \{i_1, \dots, i_k\}))$ je n -členný soubor generátorů V , jde o bázi podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty. $\square$

Příklad 2.54. Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme standardní bázi $\mathbb{R}^4$ a v ní dva vektory nahraďme vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (To jistě půjde, neboť $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ nejsou jeden násobkem druhého, a tedy jsou LN.) Jistě platí:

$$\mathbb{R}^4 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Vyhodíme z LO nadbytečné vektory a zůstane nám hledaná báze. Už dopředu víme, že bude čtyřčlenná, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Převedli jsme tudíž úlohu na problém vybrat bázi z generátorů, viz příklad 2.52. Vytvoříme tedy matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Z matice v horním stupňovitém tvaru poté vyčteme, které vektory jsou LK předchozích a lze je z LO vyhodit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že $\vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$ odpovídají vedlejším sloupcům, jsou proto LK předchozích a lze je z LO vyhodit, aniž by se změnil. Konkrétně $\vec{e}_2 = -\vec{x}_1 + 2\vec{e}_1$ a $\vec{e}_3 = -2\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 4\vec{e}_1$. Proto $\mathbb{R}^4 = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4]_{\lambda}$. Podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty je čtyřčlenný soubor generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ LN, a tudíž jde o hledanou bázi. Rozmyslete si, že je důležité napsat v matici dopředu ty vektory, které má hledaná báze obsahovat.

2.6 Souřadnice

Zavedme úmluvu, že vektorový prostor V dimenze n budeme značit V_n .

Věta 2.55 (Vektor jako LK báze). *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T . Potom pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje právě jedna uspořádaná n -tice*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n \text{ taková, že } \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i.$$

Důkaz.

- Existence takového vektoru $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ plyne z faktu, že $V_n = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
- Jednoznačnost dokážeme sporem. Necht $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ jsou dvě různé n -tice splňující, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i = \vec{0}$ a přitom jde o netriviální LK, protože jistě pro některý index $i_0 \in \hat{n}$ je $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0} \neq 0$. To je spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. $\square$

Definice 2.56. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T .

1. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom α_i nazveme i -tou **souřadnicí** vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$.
2. Necht $i \in \hat{n}$. Zobrazení $x_i^\# : V_n \rightarrow T$, které vektoru přiřadí jeho i -tou souřadnici v bázi $\mathcal{X}$, tj. $x_i^\#(\vec{x}) := \alpha_i$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme i -tým **souřadnicovým funkcionálem** v bázi $\mathcal{X}$.
3. Zobrazení $(\cdot)_\mathcal{X} : V_n \rightarrow T^n$, které vektoru přiřadí vektor všech jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$, tj. $(\vec{x})_\mathcal{X} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme **souřadnicovým izomorfismem** v bázi $\mathcal{X}$.²⁰

Zápis $(\vec{x})_\mathcal{X}$ čteme „ $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$ “ nebo „souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$ “.

Poznámka 2.57. Díky větě 2.55 o vektoru jako LK báze víme, že souřadnicový funkcionál a souřadnicový izomorfismus jsou skutečně zobrazení, tj. že se nestane, že by $x_i^\#$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých čísel nebo $(\cdot)_\mathcal{X}$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých n -tic čísel.

Věta 2.58 (Vlastnosti souřadnicového funkcionálu). Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T . Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:

1. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ je $x_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = x_i^\#(\vec{x}) + x_i^\#(\vec{y})$ (souřadnicový funkcionál $x_i^\#$ je **aditivní**).
2. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ je $x_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha x_i^\#(\vec{x})$ (souřadnicový funkcionál $x_i^\#$ je **homogenní**).

²⁰Místo $(\vec{x})_\mathcal{X}$ se v literatuře vyskytuje i $\{\vec{x}\}_\mathcal{X}$ nebo $\langle \vec{x} \rangle_\mathcal{X}$.

3. Pro bazické vektory nabývá souřadnicový funkcionál jen hodnot nula nebo jedna:

$$x_i^\#(\vec{x}_i) = 1 \text{ a } x_i^\#(\vec{x}_j) = 0 \text{ pro každé } j \in \hat{n}, j \neq i.$$

Důkaz.

1. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Potom $\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i$. Podle definice $x_i^\#$ poté platí, že $x_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$, $x_i^\#(\vec{y}) = \beta_i$ a $x_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_i + \beta_i$, a tedy dostáváme:

$$x_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = x_i^\#(\vec{x}) + x_i^\#(\vec{y}).$$

2. Necht $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom $\alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i$. Podle definice je $x_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$ a $x_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha \alpha_i$, a tudíž platí:

$$x_i^\#(\alpha \vec{x}) = \alpha x_i^\#(\vec{x}).$$

3. Tvrzení plyne z rovnosti $\vec{x}_j = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_{j-1} + 1\vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \dots + 0\vec{x}_n$. □

Poznámka 2.59. Definujme **Kroneckerovo delta** δ_{ij} :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &:= 0 \text{ pro každé } i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, \\ \delta_{ii} &:= 1 \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom lze třetí bod věty 2.58 zapsat jako $x_i^\#(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$.²¹

Důsledek 2.60 (Vlastnosti souřadnicového izomorfismu). *Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T . Pak platí:*

1. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ je $(\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{X}} = (\vec{x})_{\mathcal{X}} + (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ (souřadnicový izomorfismus je **aditivní**).
2. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ je $(\alpha \vec{x})_{\mathcal{X}} = \alpha (\vec{x})_{\mathcal{X}}$ (souřadnicový izomorfismus je **homogenní**).
3. $(\vec{x}_j)_{\mathcal{X}} = \vec{e}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$, kde $\vec{e}_j$ je j -tý vektor standardní báze T^n .

Řádně si rozmysleme rozdíl mezi objekty označenými $\vec{x}_i$ a $x_i^\#$. Zatímco $\vec{x}_i$ je vektor z V_n , je $x_i^\#$ zobrazení, které každému vektoru z V_n přiřazuje číslo z T .

Příklad 2.61. Uvažujte prostor $\mathbb{R}^3$ a v něm báze

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

²¹Leopold Kronecker (1823–1891), německý matematik

(a) Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Dále určete $e_2^{\#}(\vec{x})$ a $x_3^{\#}(\vec{x})$, kde $\vec{x}_3$ je třetí bazický vektor $\mathcal{X}$.

Řešení:

(a) Jelikož $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dostáváme, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$.

Označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, potom $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Máme tedy soustavu LAR s rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Z matice vyčteme, že $\alpha_3 = -8, \alpha_2 = 8, \alpha_1 = 3$, tudíž $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(b) Ze souřadnic $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{E}$ vidíme, že $e_2^{\#}(\vec{x}) = 5$, a z jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$, že $x_3^{\#}(\vec{x}) = -8$.

Úkol 2.62. Rozmyslete si, že pro libovolný vektor $\vec{x} \in T^n$ platí, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$. Viz obrázek 4.

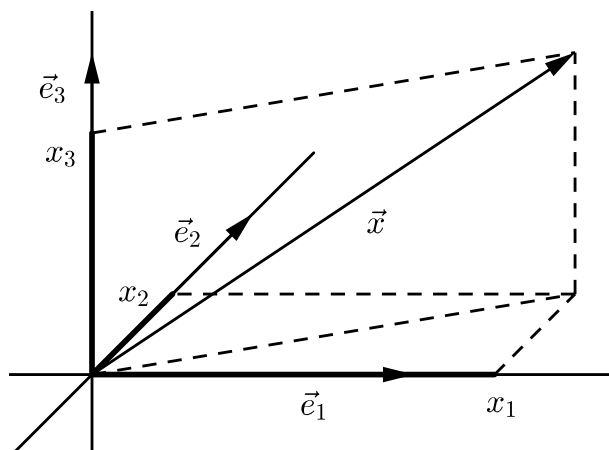
Vraťme se k motivačnímu příkladu ze začátku kapitoly. Zadání znělo: *Popište množinu všech latinských čtverců, tj. matic o třech řádcích a třech sloupcích takových, že součty ve všech řádcích i ve všech sloupcích se rovnají.*

Řešení: Označíme-li s společný řádkový a sloupcový součet, a a b první dva prvky v prvním řádku a c a d první dva prvky v druhém řádku, pak každý latinský čtverec má podobu:

$$\begin{pmatrix} a & b & s-a-b \\ c & d & s-c-d \\ s-a-c & s-b-d & a+b+c+d-s \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že latinské čtverce tvoří vektorový prostor dimenze pět. Báze obsahuje následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4: Souřadnice vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi jsou rovny jeho složkám.

Bez jakéhokoliv počítání je například jasné (Je to čtenáři jasné?), že následující úloha nemá jediné řešení (přesněji řečeno, že má nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné).

Doplňte čtverce na latinské:

$$\begin{array}{ccc}
 (a) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 4 & & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} & (b) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} & (c) & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline 4 & & 3 \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

Úkol 2.63. * Uvažujme ještě jednu úlohu podobnou latinským čtvercům. V novinách se objevila v následujícím znění: *Vypočtěte a doplňte chybějící čísla tak, aby vznikl **magický čtverec**, tj. aby součet čísel ve všech řádcích, sloupcích i v obou úhlopříčkách byl vždy stejný.*

	14		
		10	17
10	9		
		13	

Úkoly pro vás ale znějí následovně:

1. Najděte a popište množinu všech řešení úlohy co nejjednodušším možným způsobem. (Způsobů doplnění je nekonečně mnoho. Přitom v novinách bylo uvedeno právě jedno řešení.)
2. Ověřte, že magické čtverce o čtyřech řádcích a čtyřech sloupcích tvoří vektorový prostor. Najděte jeho dimenzi a bázi.
3. Přeformulujte úlohu tak, aby jediné řešení měla. Zároveň ale změňte zadání co nejméně. Ukažte, že navržená změna zaručuje jednoznačnost řešení.

3 Podprostory

Podprostory jsou podmnožiny vektorového prostoru, které si při zúžení operací zachovávají vlastnost být vektorovým prostorem. Proto jsou přirozenými a velmi důležitými příklady vektorových prostorů.

3.1 Definice podprostoru

Definice 3.1. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak P nazveme **podprostorem** V a značíme $P \subset \subset V$,²² pokud jsou splněny následující podmínky:

1. $P \subset V$.
2. $P \neq \emptyset$.
3. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí, že $\vec{x} + \vec{y} \in P$ (**uzavřenost na sčítání**).
4. Pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí, že $\alpha\vec{x} \in P$ (**uzavřenost na násobení číslem**).

Příklad 3.2. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T . Potom $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset \subset V$. Splnění všech vlastností z definice podprostoru pro LO plyne z věty 2.25 o vlastnostech LO.

Příklad 3.3. V $\mathbb{R}^2$ máme následující typy podprostorů:

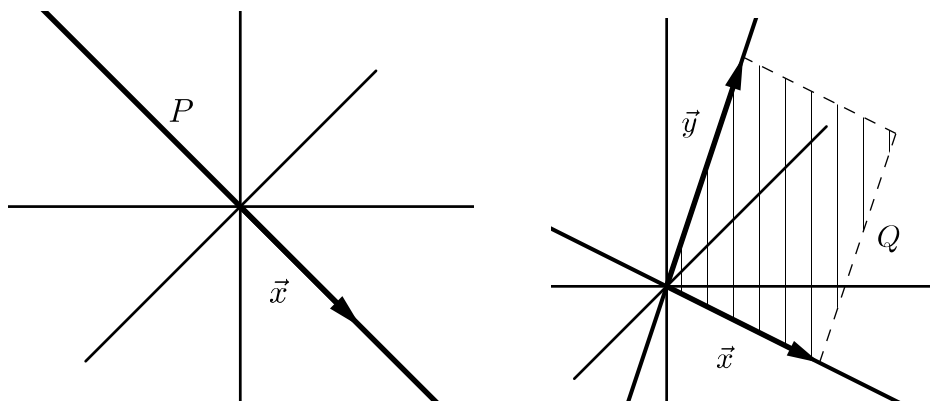
- (a) $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda = \{\vec{0}\}$.
- (b) $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Víme, že jde o přímku procházející bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a obsahující vektor $\vec{x}$.)
- (c) $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $\vec{x}, \vec{y}$ jsou LN vektory. (Víme, že jde o celé $\mathbb{R}^2$, protože $(\vec{x}, \vec{y})$ je dvoučlenný LN soubor, a tudíž tvoří bázi $\mathbb{R}^2$.)

Za chvíli se dozvíme, že žádné jiné podprostory už $\mathbb{R}^2$ nemá.

Příklad 3.4. V $\mathbb{R}^3$ máme následující typy podprostorů:

- (a) $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda = \{\vec{0}\}$.
- (b) $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Víme, že jde o přímku procházející bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a obsahující vektor $\vec{x}$ – viz obrázek 5.)

²²Lze se setkat i se značením $P \leq V$ nebo (nepřesným) $P \subset V$.



Obrázek 5: Podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou kromě nulového prostoru a celého $\mathbb{R}^3$ ještě přímka a rovina.

- (c) $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $\vec{x}, \vec{y}$ jsou LN vektory. (Snadno si rozmyslíme, že jde o rovinu procházející bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a obsahující vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ – viz obrázek 5.)
- (d) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou LN vektory. (Víme, že jde o celé $\mathbb{R}^3$, protože $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je tříčlenný LN soubor, a tedy tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.)

Za chvíli se dozvíme, že ani $\mathbb{R}^3$ už žádné jiné podprostory nemá.

Věta 3.5 (Alternativní definice podprostoru). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $P \subset V$ a $P \neq \emptyset$. Potom následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $P \subset\subset V$.
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \alpha \in T)(\alpha \vec{x} + \vec{y} \in P)$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in P)(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in P)$.

Důkaz. ★

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Nechť $\alpha \in T, \vec{x}, \vec{y} \in P$, poté díky uzavřenosti podprostoru na násobení vektorem číslem je $\alpha \vec{x} \in P$, a díky uzavřenosti podprostoru na sčítání vektorů je také $\alpha \vec{x} + \vec{y} \in P$.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Nechť $\vec{x} \in P$, pak $\vec{0} = (-1)\vec{x} + \vec{x} \in P$. Dokažme nyní tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$, $\alpha_1 \in T$ a $\vec{x}_1 \in P$ platí, že $\alpha_1 \vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{x}_1 + \vec{0} \in P$. Nechť pro nějaké $n \geq 1$ tvrzení platí. Uvažujme libovolná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1} \in P$, potom máme:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i \in P.$$

Využili jsme indukčního předpokladu, podle kterého libovolná LK n vektorů z P patří do P .

- 3. $\Rightarrow$ 1.: Necht $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in P$. Pak $\alpha\vec{x} \in P$ (dosadili jsme $n = 1, \alpha_1 = \alpha, \vec{x}_1 = \vec{x}$).
Také $\vec{x} + \vec{y} \in P$ (dosadili jsme $n = 2, \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2 = \vec{y}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). $\square$

Často budeme při ověřování, že nějaká neprázdná množina je podprostor, využívat druhý bod věty 3.5, protože je to o něco úspornější, než vycházet přímo z definice podprostoru.

Věta 3.6 (Vlastnosti podprostorů). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a necht $P \subset\subset V$. Potom platí:*

1. $\vec{0} \in P$.
2. $\{\vec{0}\} \subset\subset V$ a $V \subset\subset V$.
3. P je vektorový prostor nad tělesem T (při zúžení operace $\oplus$ na $P \times P$ a $\odot$ na $T \times P$).
4. Necht $Q \subset\subset P$ a $P \subset\subset V$, pak $Q \subset\subset V$ (**tranzitivita** vlastnosti býti podprostorem).
5. $\dim P \leq \dim V$.
6. Necht $\dim V < +\infty$. Pokud $\dim P = \dim V$, pak $P = V$.

Důkaz.

1. $P \neq \emptyset$, proto existuje $\vec{x} \in V$ takový, že $\vec{x} \in P$, a jelikož je P množina uzavřená na násobení číslem, je také $0\vec{x} = \vec{0} \in P$.
2. Splnění všech vlastností z definice podprostoru je zřejmé.
3. Tvrzení plyne z důsledku 2.12.
4. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:
 - $Q \subset V$, protože $Q \subset P \subset V$.
 - $Q \neq \emptyset$, protože $Q \subset\subset P$.
 - Q je množina uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, protože $Q \subset\subset P$.
5. Je-li $\dim V = +\infty$, potom je tvrzení zřejmé. Je-li $V = \{\vec{0}\}$, pak $P = \{\vec{0}\}$, tvrzení tedy opět platí. Pokud $\dim V = n \in \mathbb{N}$, je každých $n + 1$ vektorů ve V – tudíž i v P – LZ. Proto $\dim P \leq n$.

6. Pro $V = \{\vec{0}\}$ je tvrzení zřejmé. Pro $V \neq \{\vec{0}\}$ označme $\dim P = \dim V = n \in \mathbb{N}$. Jelikož $\dim P = n$, existuje v P n -členná báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Prostor V má dimenzi rovnu n , a tak každý n -členný LN soubor ve V je bází V . Protože $P \subset V$, je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ bází V , a tedy $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = P$. $\square$

Definice 3.7. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . **Triviálními podprostory** nazveme $\{\vec{0}\}$ a V .²³ Pokud $P \subset\subset V$ a $P \neq V$, potom P nazveme **vlastním podprostorem**.

Důsledek 3.8. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T , $\dim V < +\infty$ a $P \subset\subset V$. Pokud P je vlastní podprostor V , pak $\dim P < \dim V$.

Důkaz. Tvrzení plyne z pátého a šestého bodu věty 3.6. $\square$

Příklad 3.9. Vraťme se k podprostorům v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Z věty 3.6 jsme se dozvěděli, že každý podprostor je zároveň vektorový prostor, má tudíž dimenzi. Pro dimenzi platí, že je maximálně dva (jde-li o podprostor v $\mathbb{R}^2$) nebo maximálně tři (jde-li o podprostor v $\mathbb{R}^3$). Buď jsou tedy podprostory nulové, nebo mají maximálně dvou-, respektive tříčlennou bázi, jejímiž jsou LO. Odtud proto plyne, že žádné jiné podprostory než ty, které jsme popsali výše, v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ neexistují.

Definice 3.10. Necht A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory). **Součtem** A a B nazveme množinu:

$$A + B := \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}.$$

Řekneme, že součet $A + B$ je **direktním**, píšeme $A \oplus B$, pokud pro každý vektor $\vec{x} \in A + B$ existuje právě jeden vektor $\vec{a} \in A$ a právě jeden vektor $\vec{b} \in B$ tak, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.²⁴

Příklad 3.11. Necht $V = \mathbb{R}^2$.

- (a) Necht $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ a $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Pak $A + B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Součet

$A + B$ není direktní, protože $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Necht $C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ a $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Pak $C + D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Tentokrát je $C + D$ direktní.

Poznámka 3.12. Připomeňme pro jistotu i definici sjednocení a průniku množin. Necht A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory).

$$A \cup B := \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \vee \vec{a} \in B\},$$

$$A \cap B := \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \wedge \vec{a} \in B\}.$$

²³U pojmu triviální podprostor nepanuje jednotnost. Někdy se za něj považuje pouze $\{\vec{0}\}$.

²⁴Součet najdeme v literatuře také pod termínem spojení. Značení je též nejednotné, objevuje se například $A \vee B$. Direktnímu součtu se občas říká přímý a značí se i $A \dot{+} B$.

Věta 3.13 (Vlastnosti součtu a průniku podprostorů). *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Potom platí:*

1. $P \cap Q \subset P \cup Q \subset P + Q$.
2. $P + Q \subset\subset V$.
3. $P + Q$ je direktní $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{0}\}$.
4. $P \cap Q \subset\subset V$.
5. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$, pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V (ve smyslu inkluze), který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, tj.

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \bigcap \{Q \subset\subset V \mid \vec{x}_i \in Q \text{ pro každé } i \in \hat{n}\}.$$

Důkaz.

1. Je zřejmé z definice, že $P \cap Q \subset P \cup Q$. Je-li $\vec{x} \in P \cup Q$, pak $\vec{x} \in P$ nebo $\vec{x} \in Q$. Bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládejme, že $\vec{x} \in P$. Jelikož $\vec{0} \in Q$, máme $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \in P + Q$.

2. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

- $P + Q \subset V$, protože $P \subset V$ i $Q \subset V$ a V je uzavřená na sčítání.
- $P + Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, $\vec{0} \in Q$ a $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in P + Q$.
- $P + Q$ je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem: Pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P + Q$ a libovolné $\alpha \in T$ existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$ takové, že $\vec{x}_1 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$ a $\vec{x}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$. Proto $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha(\vec{p}_1 + \vec{q}_1) + \vec{p}_2 + \vec{q}_2 = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$. Jelikož P a Q jsou podprostory, platí podle věty 3.5, že $\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \in P$ a $\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \in Q$, z čehož plyne, že $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P + Q$.

3. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

- ($\Rightarrow$): Necht $\vec{x} \in P \cap Q$. Potom platí, že $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} \in P + Q$. Pokud by $\vec{x} \neq \vec{0}$, pak by šlo o dva různé rozklady $\vec{x}$ na součet vektorů z P a Q , což by byl spor s direktností $P + Q$.
- ($\Leftarrow$): Dokažme implikaci sporem. Předpokládáme, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, ale $P + Q$ není direktní. Potom existuje vektor $\vec{x} \in P + Q$, který lze zapsat dvěma různými způsoby:

$$\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2,$$

kde $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$. Jelikož jde o různé rozklady, je nutně $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, a tudíž také $\vec{q}_1 \neq \vec{q}_2$. Poté ale $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$ je nenulový vektor, který patří

do P i do Q , je to tedy nenulový vektor z $P \cap Q$, což je spor s předpokladem, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

4. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

- $P \cap Q \subset V$, protože $P \subset V$ a $Q \subset V$.
- $P \cap Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, $\vec{0} \in Q$. Tudíž $\vec{0} \in P \cap Q$.
- $P \cap Q$ je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem: Pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P \cap Q$ a libovolné $\alpha \in T$ platí, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ patří jak do P , tak i do Q . Jelikož P a Q jsou podprostory, patří $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ do P i do Q . Odtud už plyne, že $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P \cap Q$.

5. Už víme z prvního příkladu za definicí podprostoru, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$. Abychom dokázali, že jde o nejmenší podprostor V obsahující vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, stačí vysvětlit, že každý podprostor obsahující vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ obsahuje i jejich libovolnou LK. To je ale jasné z věty 3.5 (alternativní definice podprostoru). $\square$

Úkol 3.14. Dokažte, že dokonce průnik libovolného počtu podprostorů a součet konečného počtu podprostorů vektorového prostoru V nad tělesem T tvoří podprostor.

Poznámka 3.15. Necht $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Hloubavého čtenáře by mohlo napadnout, že zajímáme-li se o $P \cap Q$, bylo by logické zkoumat také $P \cup Q$. Ovšem $P \cup Q$ nemusí tvořit podprostor. Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ jsou jistě $P, Q \subset\subset V$, ale vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin P \cup Q$, přestože jde o součet dvou vektorů z $P \cup Q$.

Věta 3.16 (Součet a sjednocení). *Necht $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T . Potom $P + Q$ je nejmenší podprostor (ve smyslu inkluze), který obsahuje $P \cup Q$.*

Důkaz. Podle prvního bodu věty 3.13 víme, že $P \cup Q \subset P + Q$. Dále každý podprostor obsahující všechny vektory z P i všechny vektory z Q obsahuje také všechny jejich součty, tudíž obsahuje $P + Q$. Proto je $P + Q$ nejmenší podprostor, který $P \cup Q$ obsahuje. $\square$

3.2 První věta o dimenzi

Vyslovme nejprve lemma, které využijeme v důkazu 1. věty o dimenzi (a nejen tam).

Lemma 3.17. *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Necht jsou dány vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ a $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ z V . Necht dále $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ a $Q = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$. Potom platí:*

1. $P + Q = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.

2. Jsou-li navíc vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LN a zároveň vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ LN, potom

$$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m \text{ jsou LN vektory} \Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{0}\}.$$

Důkaz. Označme $L = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$.

1. Z vlastností LO pak plyne, že $P \cup Q \subset L$ a $L \subset \subset V$. Zároveň $L \subset P + Q$, protože pro libovolný vektor $\vec{x}$ z L existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ taková, že platí:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{y}_j \in P + Q.$$

Podle věty 3.16 je ale $P + Q$ nejmenší podprostor obsahující $P \cup Q$, proto nutně $L = P + Q$.

2. Ukážeme dvě implikace:

- ($\Rightarrow$): Necht $\vec{x} \in P \cap Q$, potom existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ (protože $\vec{x} \in P$), a existují $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{y}_j$ (protože $\vec{x} \in Q$). Odtud máme:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{y}_j = \vec{0}.$$

Z LN vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ pak už plyne nulovost všech koeficientů LK, tudíž $\vec{x} = \vec{0}$.

- ($\Leftarrow$): Ověřme LN vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ použitím šestého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ). Vektor $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, protože jde o bazický vektor P . Ukažme, že neexistuje ani vektor, který by byl LK předchozích. Buď by to byl některý z x -ových vektorů, tj. $\vec{x}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \vec{x}_k$, což nemůže nastat kvůli LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Nebo by to byl některý z y -ových vektorů, tedy $\vec{y}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \vec{y}_k$. Poté by ovšem platilo:

$$P \ni \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{y}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \vec{y}_k \in Q,$$

tudíž $\vec{y}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \vec{y}_k \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Vzniklá rovnost $\vec{y}_j = \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \vec{y}_k$ by však byla ve sporu s LN vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$. $\square$

Věta 3.18 (1. věta o dimenzi). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset \subset V$. Potom platí:*

$$\dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q. \quad (1)$$

Důkaz. ★ Rozdělíme důkaz na několik případů:

- Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P + Q = Q$ a $P \cap Q = P$ a platnost rovnosti (1) je zřejmá. (Analogicky pro $Q = \{\vec{0}\}$.)
- Je-li $\dim P = +\infty$, potom ze vztahu $P \subset\subset P + Q$ plyne, že $\dim(P + Q) = +\infty$, a rovnost nastává. (Podobně pro $\dim Q = +\infty$.)
- Je-li $P \neq \{\vec{0}\}$, $Q \neq \{\vec{0}\}$ a $\dim P < +\infty$, $\dim Q < +\infty$, označme $n = \dim P$ a $m = \dim Q$. Platí tudíž $n, m \in \mathbb{N}$. Uvažujme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bázi Q . Rozlišíme dva případy:

1. Nechť $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Poté podle lemmatu 3.17 je $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze $P + Q$. Proto máme:

$$\dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = (n + m) + 0 = \dim P + \dim Q.$$

2. Nechť $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$. Označme $(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_s)$ libovolnou bázi $P \cap Q$. Pak lze vektory $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_s$ nahradit s bazických vektorů P a také s bazických vektorů Q . Nechť jsou to BÚNO poslední vektory v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, tj. P má bázi $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s})$ a Q má bázi $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$. Pokud dokážeme, že potom $\mathcal{Z} = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s})$ je báze $P + Q$, bude rovnost (1) dokázána. Pak bude totiž jasné, že

$$\dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = (n + m - s) + s = \dim P + \dim Q.$$

Dokažme tedy, že $\mathcal{Z}$ je báze $P + Q$.

- (a) Podle prvního bodu lemmatu 3.17 vektory ze $\mathcal{Z}$ generují $P + Q$.
- (b) $\mathcal{Z}$ je LN soubor, protože libovolná LK $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ je triviální. To plyne z následujících úprav:

$$P \ni \sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i = - \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i \in Q,$$

tj. vektor $-\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i$ leží v $P \cap Q$. Takový vektor je potom LK bazických vektorů $P \cap Q$, tj. $-\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^s \delta_i \vec{z}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^s \delta_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ a z LN vektorů $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-s}$ plyne, že $\gamma_1 = \dots = \gamma_{m-s} = 0$. Poté z rovnosti $\sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \vec{x}_i = -\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{0}$ a z LN vektorů $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-s}$ plyne, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$ a $\beta_1 = \dots = \beta_{n-s} = 0$, což znamená, že uvažovaná LK je skutečně triviální. $\square$

Příklad 3.19. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nechť $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$.

Najděte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$.

Řešení: Z prvního bodu lemmatu 3.17 víme, že $P + Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Najít bázi $P + Q$ tedy znamená vybrat bázi z generátorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že $\dim(P + Q) = 3$ a báze $P + Q$ je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(Matice má tři hlavní sloupce a bázi tvoří vektory odpovídající hlavním sloupcům.) Pokud bychom chtěli jednodušší bázi $P + Q$, stačí si uvědomit, že $P + Q \subset \mathbb{R}^3$ a $\dim(P + Q) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Z věty 3.6 o vlastnostech podprostorů poté dostáváme, že $P + Q = \mathbb{R}^3$, takže jinou bázi $P + Q$ je například $\mathcal{E}_3$.

Z 1. věty o dimenzi zjistíme, že $\dim(P \cap Q) = 2 + 2 - 3 = 1$. Jakýkoliv nenulový vektor z $P \cap Q$ je tudíž bází. Jelikož vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LZ, jistě najdeme $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové a že platí:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom máme:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in P \cap Q.$$

Jde o hledaný nenulový vektor. Kdyby byl totiž nulový, plynulo by z LN vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

že $\alpha = \beta = 0$ a z LN vektorů $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, že $\gamma = \delta = 0$. To by byl spor s předpokladem, že alespoň jedno z čísel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je nenulové. Neznámé najdeme ze stejné matice jako při vyšetřování báze $P + Q$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Při volbě $\delta = -1$ dopočteme už jednoznačně neznámé odpovídající hlavním sloupcům $\gamma = 1, \beta = 1$ a $\alpha = 1$. Odtud dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P \cap Q.$$

Tedy $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $P \cap Q$.

3.3 Doplněk podprostoru

Definice 3.20. Necht V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a necht $P, Q \subset V$. Pokud podprostory splňují $P \oplus Q = V$, pak Q nazveme **doplňkem** P do V a jeho dimenzi $\dim Q$ značíme $\text{codim } P$ a nazýváme **kodimenzí** P .

Poznámka 3.21. Všimněme si, že podle 1. věty o dimenzi je kodimenze P dobře definována. I kdyby doplňků existovalo více, pro kodimenzi P platí:

$$\dim P + \text{codim } P = \dim P + \dim Q = \dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = \dim V + \dim(P \cap Q).$$

Z direktnosti součtu $P \oplus Q = V$ plyne $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Proto $\text{codim } P = \dim V - \dim P$, a nezávisí tudíž na volbě doplňku P do V .

Poznámka 3.22. Doplněk podprostoru lze definovat i v prostorech nekonečné dimenze. K takovému obecnějšímu případu se vrátíme později. Ke korektní práci s obecnější definicí budeme totiž potřebovat znalost lineárních zobrazení.

Věta 3.23 (Existence doplňku). *Necht V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a necht $P \subset V$. Potom doplněk P do V existuje.*

Důkaz.

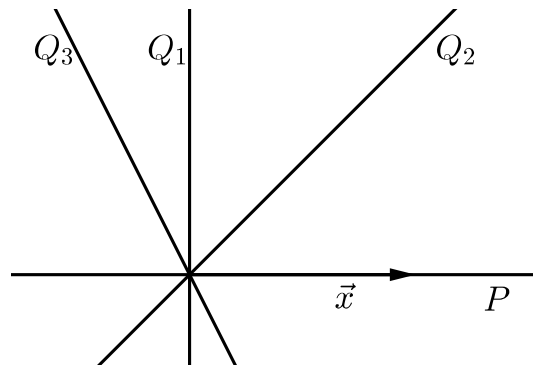
- Necht $P = \{\vec{0}\}$, pak $Q = V$ splňuje evidentně vlastnosti doplňku.
- Necht $P = V$, potom $Q = \{\vec{0}\}$ splňuje zřejmě vlastnosti doplňku.
- Necht P je vlastní a nenulový podprostor V . Označme $k = \dim P$. Potom existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ podprostoru P . Doplníme ji vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ prostoru V . Poté $Q = [\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je hledaný doplněk. Z prvního bodu lemmatu 3.17 a z faktu, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V , plyne, že $P + Q = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = V$. Z druhého bodu lemmatu 3.17 pak dostáváme, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, tudíž $P \oplus Q = V$. $\square$

Všimněme si, že důkaz věty 3.23 dal návod ke konstrukci doplňku. Báze P se doplnila na bázi V a LO z doplněných vektorů byl hledaným doplňkem P do V .

Příklad 3.24. Necht $P \subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Najděte doplněk P do $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Jelikož $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, je například $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ doplňkem P do $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 3.25. Doplněk obvykle není jediný! Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ je doplňkem $Q_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, ale také třeba $Q_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Představíme-li si situaci geometricky, potom P je přímka procházející počátkem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a doplňkem P je libovolná přímka procházející počátkem, která je různá od P . Viz obrázek 6.



Obrázek 6: Různé doplňky přímky v $\mathbb{R}^2$.

4 Lineární zobrazení

Motivace. Diferenciální rovnice jsou partií matematiky, která má uplatnění ve fyzice, ekonomii, biologii, chemii atd. Prostě a jednoduše, vymyslete si jakýkoliv jev a je pravděpodobné, že ho bude modelovat řešení nějaké diferenciální rovnice. **Obyčejnou lineární diferenciální rovnici** řádu n nazýváme rovnicí:

$$f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = q(x),$$

přičemž $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $f^{(k)}(x)$ značí k -tou derivaci funkce f v bodě x . Na konci kapitoly si popíšeme, jak úzce takové diferenciální rovnice souvisí s lineárními zobrazeními.

4.1 Definice lineárního zobrazení

Definice 4.1. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $A: P \rightarrow Q$ nazveme **lineárním (homomorfním)**, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

1. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí, že $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ (**aditivita zobrazení A**).
2. Pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí, že $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ (**homogenita zobrazení A**).

Místo $A(\vec{x})$ budeme častěji psát $A\vec{x}$.

Poznámka 4.2. Lineární zobrazení má smysl zavádět jen pro vektorové prostory P, Q nad stejným tělesem. V druhé podmínce (homogenita) se totiž čísla z tělesa násobí jak vektory $\vec{x}$ z P , tak i vektory $A\vec{x}$ z Q .

Poznámka 4.3. Pro každé lineární zobrazení $A: P \rightarrow Q$ platí, že $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, přičemž $\vec{0}_P$ je nulový vektor z P a $\vec{0}_Q$ je nulový vektor z Q .

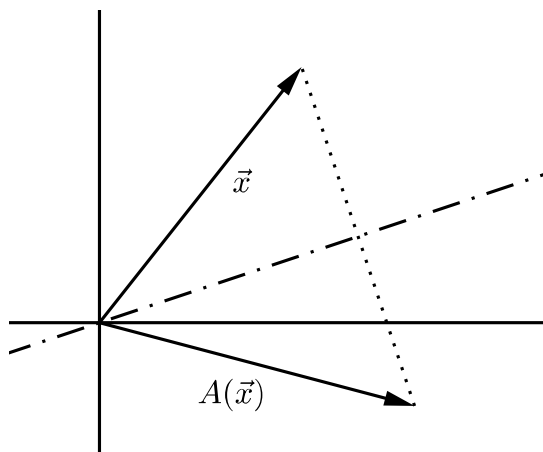
Důkaz. Platí $A\vec{0}_P = A(0\vec{0}_P) = 0(A\vec{0}_P) = \vec{0}_Q$, kde v první a poslední rovnosti je využit fakt z věty 2.10, že $0\vec{a} = \vec{0}$ pro každý vektor $\vec{a}$, a ve druhé rovnosti je využita homogenita A . $\square$

Příklad 4.4. Uveďme nejznámější příklady lineárních zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ilustrace je na obrázku 7.

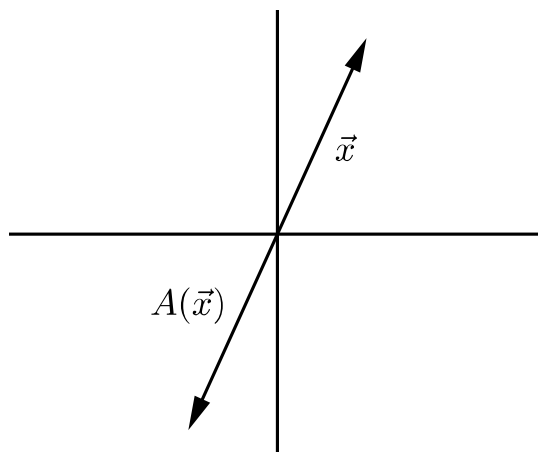
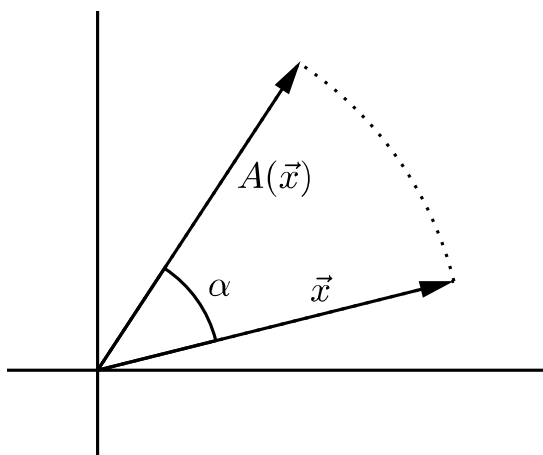
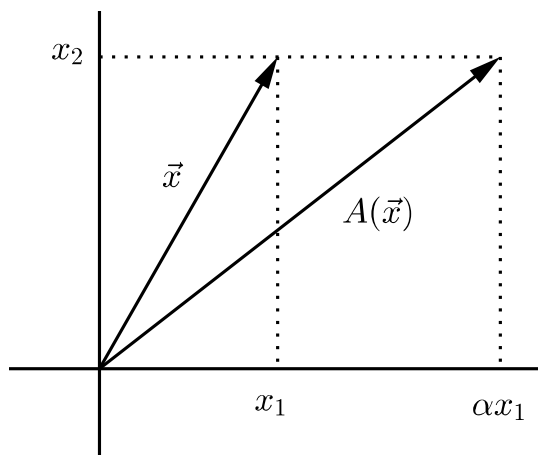
(a) Zrcadlení podle osy jdoucí počátkem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Středová souměrnost.

(a) Zrcadlení podle osy



(b) Středová souměrnost

(c) Rotace o úhel α (d) Prodloužení ve směru x Obrázek 7: Příklady lineárních zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- (c) Rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček. (Samozřejmě, že také rotace o úhel α po směru hodinových ručiček je lineární zobrazení, neboť jde vlastně o rotaci o úhel $2\pi - \alpha$ proti směru hodinových ručiček.)

Středová souměrnost je vlastně speciální případ rotace pro $\alpha = \pi$.

- (d) Prodloužení (zkrácení) ve směru $\vec{e}_1$. (Zobrazení přiřadí vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor $\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, přičemž pro $\alpha > 1$ jde o prodloužení a pro $0 < \alpha < 1$ o zkrácení ve směru $\vec{e}_1$.) Podobně lze definovat prodloužení (zkrácení) ve směru $\vec{e}_2$.

U všech zobrazení si čtenář sám ověří, že jsou lineární.

Věta 4.5 (Alternativní definice lineárního zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $A: P \rightarrow Q$. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. A je lineární zobrazení.
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y})$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in P)(A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i)$.

Důkaz. ★

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Nechť $\alpha \in T, \vec{x}, \vec{y} \in P$, pak podle aditivity A a poté homogenity A platí, že $A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = A(\alpha\vec{x}) + A\vec{y} = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Nechť $\vec{x} \in P$, pak $\vec{0}_P = (-1)\vec{x} + \vec{x}$. Podle druhého bodu proto máme $A\vec{0}_P = (-1)A\vec{x} + A\vec{x} = \vec{0}_Q$. Tedy obraz nulového vektoru je nulový vektor. Dokažme nyní tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1, \alpha_1 \in T$ a $\vec{x}_1 \in P$ platí, že $\alpha_1 \vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{x}_1 + \vec{0}_P$. Proto podle druhého bodu máme:

$$A(\alpha_1 \vec{x}_1) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\vec{0}_P = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \vec{0}_Q = \alpha_1 A\vec{x}_1.$$

Nechť pro nějaké $n \geq 1$ tvrzení platí. Uvažujme libovolná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in T$ a vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1} \in P$, potom $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$. Tudíž podle druhého bodu a poté podle indukčního předpokladu máme:

$$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\left(\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i.$$

- 3. $\Rightarrow$ 1.: Nechť $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in P$, pak $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$ (dosadili jsme $n = 1, \alpha_1 = \alpha, \vec{x}_1 = \vec{x}$) a $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ (dosadili jsme $n = 2, \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2 = \vec{y}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). □

Druhý bod věty 4.5 zkracuje ověřování linearitu zobrazení, proto jej budeme v následujících důkazech využívat, místo abychom vycházeli přímo z definice.

Definice 4.6. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Množinu lineárních zobrazení $P \rightarrow Q$ značíme $\mathcal{L}(P, Q)$.²⁵ Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\alpha \in T$, pak definujeme operace:

- **sčítání zobrazení** $A + B$ pro každý vektor $\vec{x} \in P$ vztahem $(A + B)\vec{x} := A\vec{x} + B\vec{x}$,
- **násobení zobrazení A číslem α** pro každý vektor $\vec{x} \in P$ vztahem $(\alpha A)\vec{x} := \alpha A\vec{x}$.

Věta 4.7 (Vektorový prostor lineárních zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Potom množina $\mathcal{L}(P, Q)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem definovanými výše tvoří vektorový prostor nad T .*

²⁵Někteří matematici používají symbol $\text{Hom}(P, Q)$ nebo $L(P, Q)$.

Důkaz. ★ Je třeba ověřit:

- Neprázdnost $\mathcal{L}(P, Q)$:

$\mathcal{L}(P, Q)$ obsahuje **nulové zobrazení** Θ , které každému vektoru z P přiřazuje nulový vektor z Q . Jde o lineární zobrazení, protože pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in T$ platí:

$$\Theta(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}_Q = \alpha\vec{0}_Q + \vec{0}_Q = \alpha\Theta\vec{x} + \Theta\vec{y}.$$

- Uzavřenost na sčítání vektorů:

Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že $A + B$ je lineární zobrazení.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí:

$$\begin{aligned} (A + B)(\beta\vec{x} + \vec{y}) &= A(\beta\vec{x} + \vec{y}) + B(\beta\vec{x} + \vec{y}) && \text{(definice } A + B) \\ &= (\beta A\vec{x} + A\vec{y}) + (\beta B\vec{x} + B\vec{y}) && \text{(linearita } A \text{ a } B) \\ &= \beta(A\vec{x} + B\vec{x}) + (A\vec{y} + B\vec{y}) && \text{(vlastnosti prostoru } Q) \\ &= \beta(A + B)\vec{x} + (A + B)\vec{y} && \text{(definice } A + B). \end{aligned}$$

- Uzavřenost na násobení vektoru číslem:

Pro každé $\alpha \in T$ a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že αA je lineární zobrazení.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí:

$$\begin{aligned} (\alpha A)(\beta\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha A(\beta\vec{x} + \vec{y}) && \text{(definice } \alpha A) \\ &= \alpha(\beta A\vec{x} + A\vec{y}) && \text{(linearita } A) \\ &= \alpha(\beta A\vec{x}) + \alpha A\vec{y} && \text{(vlastnosti prostoru } Q) \\ &= \beta(\alpha A\vec{x}) + \alpha A\vec{y} && \text{(vlastnosti prostoru } Q) \\ &= \beta(\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y} && \text{(definice } \alpha A). \end{aligned}$$

- Platnost osmi axiomů vektorového prostoru:

1. Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + B = B + A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = B\vec{x} + A\vec{x} = (B + A)\vec{x}$. Využili jsme komutativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q .
2. Pro každé $A, B, C \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + (B + C) = (A + B) + C$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + (B + C))\vec{x} = A\vec{x} + (B + C)\vec{x} = A\vec{x} + (B\vec{x} + C\vec{x}) = (A\vec{x} + B\vec{x}) + C\vec{x} = (A + B)\vec{x} + C\vec{x} = ((A + B) + C)\vec{x}$. Využili jsme asociativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q .
3. Existuje zobrazení $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + B = A$. Stačí položit $B = \Theta$ (nulové zobrazení), o kterém už víme, že je lineární. Jistě roli nulového vektoru hraje, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí, že $(A + \Theta)\vec{x} = A\vec{x} + \Theta\vec{x} = A\vec{x} + \vec{0}_Q = A\vec{x}$.

4. Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ existuje $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že $A + B = \Theta$. Stačí položit $B = (-1)A$, o kterém z uzavřenosti na násobení číslem víme, že je lineární. Snadno ověříme, že hraje roli opačného vektoru k A , protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí, že $(A + ((-1)A))\vec{x} = A\vec{x} + ((-1)A)\vec{x} = A\vec{x} + (-1)A\vec{x} = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$.
5. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, protože pro každý vektor $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(\beta A))\vec{x} = \alpha(\beta A)\vec{x} = \alpha(\beta A\vec{x}) = (\alpha\beta)A\vec{x} = ((\alpha\beta)A)\vec{x}$. Využili jsme asociativního zákona vzhledem k násobení vektoru číslem v Q .
6. Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $1A = A$, což plyne přímo z definice násobení zobrazení číslem.
7. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $((\alpha + \beta)A)\vec{x} = (\alpha + \beta)A\vec{x} = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\beta A)\vec{x} = (\alpha A + \beta A)\vec{x}$. Využili jsme distributivity násobení vektoru číslem v Q vzhledem ke sčítání čísel.
8. Pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(A + B))\vec{x} = \alpha(A + B)\vec{x} = \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) = \alpha A\vec{x} + \alpha B\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\alpha B)\vec{x} = (\alpha A + \alpha B)\vec{x}$. Využili jsme distributivity násobení vektoru číslem vzhledem ke sčítání vektorů v Q . $\square$

Definice 4.8. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T .

- (a) Je-li $A \in \mathcal{L}(V, V)$, nazýváme A **lineárním operátorem** a píšeme $\mathcal{L}(V)$ místo $\mathcal{L}(V, V)$.²⁶
- (b) Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V, T)$, nazýváme φ **lineárním funkcionálem**, píšeme $V^\#$ místo $\mathcal{L}(V, T)$. Prostor $V^\#$ nazýváme **duálním prostorem** k V .²⁷

Příklad 4.9. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T .

- (a) Příkladem lineárního operátoru je **identický operátor** I , který každému $\vec{x} \in V$ přiřadí $I\vec{x} := \vec{x}$.²⁸
- (b) Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V . Pak pro každé $i \in \hat{n}$ je i -tý souřadnicový funkcionál $x_i^\#$ v bázi $\mathcal{X}$ příkladem lineárního funkcionálu, přičemž aditivita a homogenita $x_i^\#$ plynou z věty 2.58 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu.

Definice 4.10. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

²⁶Lineární operátor je také nazýván endomorfismem.

²⁷Lineární funkcionál najdeme v jiných zdrojích též pod názvem lineární forma. Duální prostor se také značí $\hat{V}$ nebo V^* .

²⁸Je možné se setkat i se symbolem 1_V nebo id_V místo I .

- (a) Je-li A prosté, řekneme, že A je **monomorfním** zobrazením.
- (b) Je-li A „na“ Q , řekneme, že A je **epimorfním** zobrazením.
- (c) Je-li A prosté a „na“ Q , řekneme, že A je **izomorfním** zobrazením.
- (d) Je-li A izomorfní a $P = Q$, řekneme, že A je **regulárním operátorem**.²⁹

Poznámka 4.11. Definice prostého zobrazení a zobrazení „na“ (surjektivního) známe z matematické analýzy. Přesto je připomeneme. Nechť $A: P \rightarrow Q$.

- A je prosté, pokud $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)((A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}))$.
- A je „na“ Q , pokud $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$.

Uvědomme si, že monomorfní a prosté zobrazení není totéž. Prosté zobrazení totiž nemusí být lineární. Podobně epimorfní a surjektivní zobrazení není totéž.

Příklad 4.12. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T . Ukažte, že souřadnicový izomorfismus $(\cdot)_{\mathcal{X}}$ v bázi $\mathcal{X}$ je skutečně izomorfismus.

Řešení: Připomeňme, že pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ je souřadnicový izomorfismus definován

vztahem $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Z důsledku 2.60 o vlastnostech souřadnicového

izomorfismu plyne jeho linearita. Zbývá tedy dokázat, že $(\cdot)_{\mathcal{X}}: V_n \rightarrow T^n$ je prosté a „na“ T^n .

- Prostota:

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že je-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ a označíme-li $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, potom

z definice souřadnicového izomorfismu máme $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{y}$.

- „na“ T^n :

Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$, poté pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in V_n$ platí, že $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Věta 4.13 (Linearita inverzního zobrazení). Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A je izomorfní. Pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$, tj. A^{-1} existuje a je také izomorfní.

²⁹Regulární operátor bývá také nazýván automorfismem.

Důkaz. Jelikož A je prosté zobrazení s definičním oborem P a oborem hodnot Q , víme z matematické analýzy, že A^{-1} existuje, má definiční obor Q a obor hodnot P . Zbývá ověřit, že $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$.

Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q$ a pro každé $\alpha \in T$ ověříme, že $A^{-1}(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2$. Označme $\vec{x}_1 = A^{-1}\vec{y}_1$ a $\vec{x}_2 = A^{-1}\vec{y}_2$. Potom z definice inverzního zobrazení víme, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$. Z linearit A dostáváme, že $\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. Opět z definice inverzního zobrazení dostáváme:

$$A^{-1}(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2. \quad \square$$

Věta 4.14 (Linearita složeného zobrazení). *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.³⁰*

Důkaz. Složené zobrazení je pro každé $\vec{x} \in P$ definováno $(AB)\vec{x} := A(B\vec{x})$. Jde tudíž o zobrazení P do V (A působí na vektor $B\vec{x}$, který je z Q). Zbývá ověřit linearitu.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in T$ platí:

$$\begin{aligned} (AB)(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A(B(\alpha\vec{x} + \vec{y})) && \text{(definice } AB) \\ &= A(\alpha B\vec{x} + B\vec{y}) && \text{(linearita } B) \\ &= \alpha A(B\vec{x}) + A(B\vec{y}) && \text{(linearita } A) \\ &= \alpha(AB)\vec{x} + (AB)\vec{y} && \text{(definice } AB). \end{aligned}$$

□

Příklad 4.15. Nechť zobrazení $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $B: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou definována:

- pro každé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,
- pro každé $(x_1) \in \mathbb{R}^1$ je $B(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$. Dále najděte předpis pro složené zobrazení AB , které je podle věty 4.14 také lineární.

Řešení: Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A \begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \alpha x_2 + y_2 \\ \alpha x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2) \\ \alpha x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ \alpha x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}, \end{aligned}$$

³⁰Složené zobrazení se také značí $A \circ B$.

kde jsme využili vlastnosti sčítání a násobení čísel v $\mathbb{R}$ a definici sčítání vektorů v $\mathbb{R}^2$. Podobně čtenář sám ověří, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$.

Pro každé $(x_1) \in \mathbb{R}^1$ platí:

$$(AB)(x_1) = A(B(x_1)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Úkol 4.16. Necht P, Q, V jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Dokažte následující implikace:

- (a) Je-li A i B monomorfní, potom AB je monomorfní.
- (b) Je-li A i B epimorfní, potom AB je epimorfní.
- (c) Je-li A i B izomorfní, potom AB je izomorfní.
- (d) Je-li AB monomorfní, potom B je monomorfní.
- (e) Je-li AB epimorfní, potom A je epimorfní.

Definice 4.17. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak (stejně jako v matematické analýze – viz obrázek 8):

- **Obrazem** M při zobrazení A nazveme množinu $A(M) := \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in M\}$.
- **Vzorem** N při zobrazení A nazveme množinu $A^{-1}(N) := \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$.

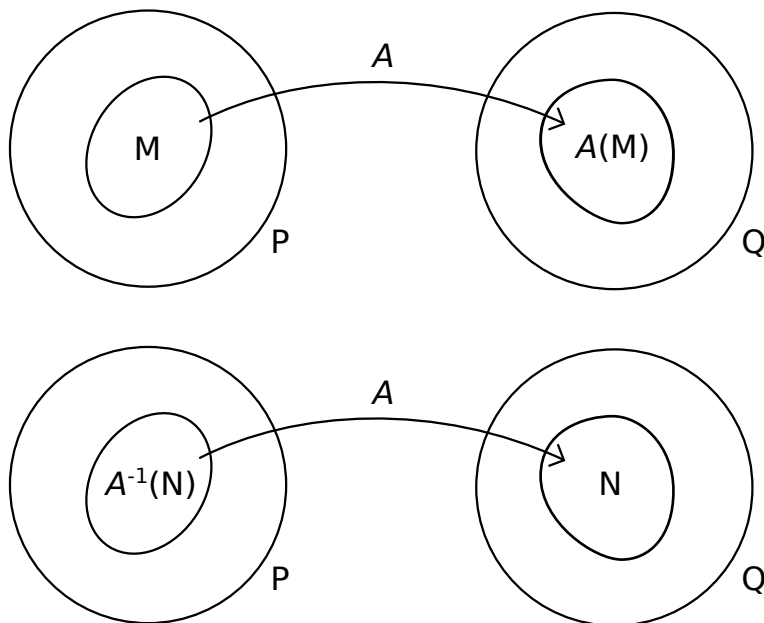
Místo $A^{-1}(\{\vec{x}\})$ budeme psát $A^{-1}(\vec{x})$.

Příklad 4.18. Necht zobrazení A, B jsou definována stejně jako v příkladu 4.15.

- Je-li $M = \{(1), (2), (3)\}$, potom $B(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
- Je-li $N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a $N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, pak $B^{-1}(N_1) = \{(1)\}$ a $B^{-1}(N_2) = \emptyset$.
- Je-li $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, potom $A^{-1}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Poznámka 4.19. Nepletme si vzor množiny $A^{-1}(N)$ (jde o množinu) s inverzním zobrazením A^{-1} (jde o zobrazení). I pro zobrazení, která nejsou prostá, má smysl hovořit o vzorech množin. Viz předchozí příklad, kde $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ existuje, ale A není prosté, protože na-

příklad $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Přitom ovšem $A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nemá bez prostoty A smysl, protože jde o obraz vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ při neexistujícím zobrazení A^{-1} .



Obrázek 8: Obraz a vzor množiny.

Věta 4.20 (Obraz a vzor podprostoru). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset\subset P$ a $N \subset\subset Q$. Potom platí:*

1. $A(M) \subset\subset Q$.

Slovy: „Lineární obraz podprostoru je podprostor.“

2. $A^{-1}(N) \subset\subset P$.

Slovy: „Lineární vzor podprostoru je podprostor.“

Speciálně $A(P) \subset\subset Q$ a $A^{-1}(\vec{0}_Q) \subset\subset P$.

Důkaz. Ověříme axiomy podprostoru. Čtenář si jistě všimne, kde v důkazu využíváme, že M , respektive N je podprostor.

1.
 - $A(M) \subset Q$, což plyne přímo z definice.
 - $A(M) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_P \in M$, proto $\vec{0}_Q \in A(M)$.
 - Množina $A(M)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem a sčítání: Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in A(M)$ a pro každé $\alpha \in T$ existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ tak, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$, a platí:

$$\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in A(M).$$

2.
 - $A^{-1}(N) \subset P$, což plyne přímo z definice.
 - $A^{-1}(N) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_Q \in N$, proto $\vec{0}_P \in A^{-1}(N)$.

- Množina $A^{-1}(N)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem a sčítání: Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$ a $\alpha \in T$ platí, že $A\vec{x}_1 \in N$, $A\vec{x}_2 \in N$, a dále z linearity A dostaneme:

$$A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \in N.$$

Proto $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$. □

4.2 Hodnost, jádro, defekt

Definice 4.21. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

- (a) **Hodností** A nazveme $\dim A(P)$ a značíme ji $h(A)$.³¹
- (b) **Jádrem** A nazveme $A^{-1}(\vec{0}_Q) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$ a značíme ho $\ker A$.³²
- (c) **Defektem** A nazveme $\dim \ker A$ a značíme ho $d(A)$.

Poznámka 4.22. Má smysl uvažovat dimenzi oboru hodnot $A(P)$ a jádra $\ker A$, protože z věty 4.20 o obrazech a vzorech podprostorů plyne, že jde o podprostory.

Příklad 4.23. Pro zobrazení A, B z příkladu 4.15 určete hodnost, jádro a defekt.

Řešení:

$$\bullet \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Proto $d(A) = 1$. Dále $A(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$, proto $h(A) \leq 2$.

Zároveň $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$ a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$, proto $h(A) \geq 2$. Suma sumárum je $h(A) = 2$ a z věty 3.6 o vlastnostech podprostorů plyne, že $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

$$\bullet \ker B = \left\{ (x_1) \in \mathbb{R}^1 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0)\}. \text{ Proto } d(B) = 0.$$

$$\text{Dále } B(\mathbb{R}^1) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}. \text{ Tudíž } h(B) = 1.$$

³¹Zejména v anglické literatuře se objevuje pro hodnost zobrazení A symbol $r(A)$ od slova rank, což je anglicky hodnost. Místo $A(P)$ se též setkáme se symboly $\text{Im } A$, $\mathbb{I}m A$ nebo **Im** A – z anglického image – a místo oboru hodnot A se pak říká obraz A . V anglické literatuře je časté i značení $\text{Ran}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ podle slova range(space), což je anglicky obor hodnot.

³²Symbol $\ker$ je z anglického kernel, což znamená jádro. Setkáme se i se značením $\text{Ker } A$, $\mathbb{K}er A$ nebo **Ker** A . V anglické literatuře se kupodivu více používá $\mathcal{N}(A)$ podle slova nullspace.

Definujme dva významné operátory na prostoru polynomů, které nám budou často sloužit jako příklady rozdílného chování zobrazení na prostorech konečné a nekonečné dimenze.

Definice 4.24. ★ Necht $p \in \mathcal{P}$, $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Pak definujeme operátory $D, S: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ vztahy:

$$(Dp)(t) := \sum_{j=1}^n j \alpha_j t^{j-1},$$

$$(Sp)(t) := \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j}{j+1} t^{j+1}.$$

D nazýváme **operátorem derivování** a S **operátorem integrování**.

Názvy operátorů pramení z jejich podobnosti s derivací, respektive primitivní funkcí, jak je známe z matematické analýzy.

Úkol 4.25. * Dokažte následující vlastnosti operátorů derivování a integrování:

- (a) $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
- (b) D není monomorfní a je epimorfní, S je monomorfní a není epimorfní.
- (c) $\ker D = [e_1]_\lambda$ a $\ker S = \{\mathcal{O}\}$.
- (d) $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ a $S(\mathcal{P}) = \{\text{polynomy s nulovým konstantním členem}\}$.
- (e) D i S lze zúžit na prostor konečné dimenze $\mathcal{P}_n$. Potom $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m)$, kde $m \geq n-1$, a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m)$, kde $m \geq n+1$. Tudíž už nejde nutně o operátory. Prozkoumejte i pro taková zúžení jejich jádro a obor hodnot v závislosti na volbě m .

Věta 4.26 (Obraz lineárního obalu). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z P . Pak platí:

$$A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda.$$

Důkaz. $\vec{y} \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) \Leftrightarrow$ existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{y} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) \Leftrightarrow$ existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i \Leftrightarrow \vec{y} \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$, přičemž ve druhé ekvivalenci jsme využili linearitu A . $\square$

Příklad 4.27. Věta 4.26 o obrazu lineárního obalu umožňuje vypočítat jednoduše hodnotu zobrazení. Mějme A jako v příkladě 4.15. Spočtěte $h(A)$.

Řešení:

$$A(\mathbb{R}^3) = A\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda\right) = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda = \mathbb{R}^2,$$

proto $h(A) = 2$.

Důsledek 4.28 (Dimenze obrazu podprostoru). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $P_1 \subset\subset P$. Potom platí, že $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$. Speciálně $h(A) \leq \dim P$.*

Důkaz.

- Je-li $P_1 = \{\vec{0}\}$, pak $A(P_1) = \{\vec{0}\}$ a nerovnost platí.
- Je-li $\dim P_1 = +\infty$, potom je také nerovnost zřejmá.
- Je-li $\dim P_1 \in \mathbb{N}$, pak existuje báze P_1 a nerovnost je důsledkem věty 4.26. □

Věta 4.29 (Prostota a jádro lineárního zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom A je prosté, právě když $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.*

Důkaz. Zobrazení A je prosté, právě když pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí:

$$(A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}).$$

Díky linearitě A lze výrok přepsat do tvaru:

$$(A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_Q) \Rightarrow (\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_P).$$

Ten je poté evidentně ekvivalentní s tvrzením, že pro každé $\vec{z} \in P$ platí:

$$(A\vec{z} = \vec{0}_Q) \Rightarrow (\vec{z} = \vec{0}_P).$$

Podle definice jádra je toto ekvivalentní s $\ker A = \{\vec{0}_P\}$. □

Příklad 4.30. Ukážeme, že tvrzení obdobné větě 4.29 pro zobrazení, které není lineární, neplatí. Nechť $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcionál definovaný následovně: Pro každé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definujeme $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$. Pak φ není prostý – například $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Zároveň ale $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Podle věty 4.29 o prostotě a jádru lineárního zobrazení je jasné, že φ není lineární. Předpoklad linearity zobrazení A v předchozí větě je nezbytný!

Věta 4.31 (Prostota a dimenze obrazu podprostoru). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A je monomorfní.*

1. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LN vektory v P , potom jsou $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n$ LN v Q .
2. Je-li $P_1 \subset\subset P$, pak $\dim A(P_1) = \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim P$.

Důkaz.

1. Necht $\sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$. Potom $A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \vec{0}_Q$, tj. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in \ker A$. Jelikož A je prosté, platí podle věty 4.29, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}_P$. Z LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ plyne, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
2. Nerovnost $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$ vyplývá z důsledku 4.28. Pro důkaz opačné nerovnosti rozlišíme několik případů:
 - Je-li $P_1 = \{\vec{0}_P\}$, pak nerovnost $\dim A(P_1) \geq \dim P_1$ platí triviálně.
 - Je-li $\dim P_1 = n \in \mathbb{N}$, pak existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ prostoru P_1 . Podle prvního už dokázaného bodu jsou vektory $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n$ LN, proto dostáváme:

$$\dim A(P_1) \geq n = \dim P_1.$$

- Je-li $\dim P_1 = +\infty$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje v P_1 n LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Podle prvního bodu jsou pak vektory $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n$ LN. Tudíž $\dim A(P_1) = +\infty$. □

Důsledek 4.32 (Hodnost izomorfismu). *Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní. Potom $h(A) = \dim P$ a $h(A) = \dim Q$.*

Důkaz. První rovnost plyne z věty 4.31 (využíváme monomorfности) a druhá z faktu, že $A(P) = Q$ (využíváme epimorfности). □

Věta 4.33 (Hodnost složeného zobrazení). *Necht P, Q, V jsou vektorové prostory nad tělesem T a necht $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak platí:*

1. $h(AB) \leq h(A)$. Je-li navíc B epimorfní, potom $h(AB) = h(A)$.
2. $h(AB) \leq h(B)$. Je-li navíc A monomorfní, pak $h(AB) = h(B)$.

Důkaz.

1. Zřejmá je rovnost $h(AB) = \dim(AB)(P) = \dim A(B(P))$. Protože $B(P) \subset\subset Q$, platí, že $A(B(P)) \subset\subset A(Q)$. Proto $h(AB) \leq \dim A(Q) = h(A)$. Všimněme si, že je-li B „na“ Q , tj. $B(P) = Q$, pak platí rovnost.
2. Podle důsledku 4.28 o dimenzi obrazu podprostoru platí:

$$h(AB) = \dim A(B(P)) \leq \dim B(P) = h(B).$$

Je-li A prosté, pak rovnost plyne z věty 4.31. □

Věta 4.34 (Zadání lineárního zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P a $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ jsou libovolné vektory z Q . Potom existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující pro každé $i \in \hat{n}$ vztah $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$.*

Slovy: „Lineární zobrazení je jednoznačně určeno, jsou-li zadány obrazy bazických vektorů.“

Důkaz.

- Existence: Pro každé $\vec{x} \in P$ označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a definujme $A\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i$.

Poté A je zobrazení P do Q a evidentně splňuje $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Zbývá ukázat, že A je lineární.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a každé $\alpha \in T$ označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pak

z linearitě souřadnicového izomorfismu víme, že $(\alpha\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$. Odtud

dostaneme:

$$A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i + \beta_i) \vec{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{y}_i = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}.$$

- Jednoznačnost: Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňuje $B\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom pro každé $\vec{x} \in P$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, platí díky linearitě B rovnost:

$$B\vec{x} = B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = A\vec{x}.$$

Proto $B = A$. □

Úkol 4.35. Ověřte pro lineární zobrazení A z věty 4.34 následující vlastnosti:

- Jsou-li vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ LN, pak A je monomorfní.
- Je-li $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_{\lambda} = Q$, pak A je epimorfní.
- Je-li $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q , pak A je izomorfní.

Věta 4.36 (Řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\vec{b} \in A(P)$. Pak množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, tedy $A^{-1}(\vec{b})$, má tvar:

$$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A,$$

kde $\vec{a} \in P$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$ (takové $\vec{a}$ nazýváme **partikulárním řešením**).

Důkaz.

$$\vec{x} \in A^{-1}(\vec{b}) \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A\vec{x} = A\vec{a} \Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} \in \ker A \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{a} + \ker A.$$

□

Poznámka 4.37. Všimněme si, že předpoklad $\vec{b} \in A(P)$ existenci partikulárního řešení $\vec{a}$ vynucuje. Kdyby nebyl splněn, bylo by pochopitelně $A^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$.

Příklad 4.38. Necht A je zobrazení definované v příkladu 4.15. Už jsme v příkladu 4.23 vyšetřili, že

$$\ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \text{ a } A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Tudíž vidíme, že množinu řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáme opravdu sčítáním partikulárního řešení se všemi možnými vektory z jádra.

4.3 Druhá věta o dimenzi

Věta 4.39 (2. věta o dimenzi). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T , necht $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\dim P < +\infty$. Potom

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Důkaz. Z důsledku 4.28 plyne, že $h(A) \leq \dim P < +\infty$.

- Je-li $h(A) = 0$, pak $\ker A = P$ a tvrzení věty evidentně platí.
- Je-li $h(A) = k \in \mathbb{N}$, potom existuje $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k)$ báze $A(P)$. Z definice $A(P)$ víme, že existují vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$, pro které $\vec{y}_i = A\vec{x}_i$. Označme $\tilde{P} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_{\lambda}$, pak $\dim \tilde{P} \leq k$. Zároveň podle důsledku 4.28 platí:

$$k = \dim A(P) = \dim A(\tilde{P}) \leq \dim \tilde{P}.$$

Tudíž $\dim \tilde{P} = k$. Ukažme, že $\ker A$ je doplněk $\tilde{P}$ do P , tj.

$$P = \tilde{P} \oplus \ker A. \tag{2}$$

Poté bude jasné, že $\dim P = k + d(A) = h(A) + d(A)$. Tedy zbývá ukázat dvě věci:

- (a) $\tilde{P} + \ker A = P$, tj. pro každé $\vec{x} \in P$ existuje $\vec{p} \in \tilde{P}$ a $\vec{q} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $A\vec{x} \in A(P)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k)$ je báze $A(P)$, existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ taková, že $A\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i$. Položíme $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \vec{x} - \vec{p}$. Potom $\vec{p} \in \tilde{P}$. Zbývá ověřit, že $\vec{q} \in \ker A$.

$$A\vec{q} = A\vec{x} - A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i\right) = A\vec{x} - \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q,$$

proto skutečně $\vec{q} \in \ker A$.

- (b) Direktnost součtu, tj. $\tilde{P} \cap \ker A = \{\vec{0}_P\}$. Je-li $\vec{x} \in \tilde{P}$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$. Je-li $\vec{x}$ zároveň z $\ker A$, potom $\vec{0}_Q = A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i$. Z LN vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{k}$. Tedy vektor $\vec{x}$ z průniku je nulový. $\square$

Příklad 4.40. Nebudeme uvádět nový příklad, ale nabádáme čtenáře, aby se vrátil k příkladu 4.23, kde jsme vyšetřili jádro a hodnotu zobrazení A a B , a zkontroloval, že rovnost z 2. věty o dimenzi pro ně platí.

4.4 Izomorfismus

Definice 4.41. Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Řekneme, že P a Q jsou **izomorfními prostory** (píšeme $P \cong Q$), pokud existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

Příklad 4.42. Necht je dán vektorový prostor V_n nad tělesem T , přičemž $n \in \mathbb{N}$. Pak $V_n \cong T^n$, protože souřadnicový izomorfismus v libovolné bázi zobrazuje V_n na T^n .

Někdy je možné rozhodnout podle dimenze, zda jsou prostory izomorfní.

Věta 4.43 (Izomorfismus prostorů a dimenze). *Necht P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a necht alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi. Pak $P \cong Q$ právě tehdy, když $\dim P = \dim Q$.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Necht $P \cong Q$, potom existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Z důsledku 4.32 plyne, že $\dim P = h(A) = \dim Q$.
- ($\Leftarrow$): Pokud $\dim P = \dim Q = 0$, pak je zřejmé, že $P \cong Q$. Necht $\dim P = \dim Q = n \in \mathbb{N}$. Poté existují $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q . Z věty 4.34 o zadání lineárního zobrazení víme, že pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Ukažme, že toto zobrazení je izomorfní, tj. zbývá dokázat, že je prosté a „na“ Q . (To bylo i předmětem úkolu 4.35.)

(a) A je prosté: Pro libovolný vektor $\vec{x} \in \ker A$, kde $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, platí, že $A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = \vec{0}_Q$. Z LN vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$, tudíž $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a prostota A plyne z věty 4.29.

(b) A je „na“ Q :

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = Q.$$

□

Důsledek 4.44. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Pokud $P \cong Q$, pak $\dim P = \dim Q$.*

Věta 4.45 (Jednodušší ověření izomorfnosti zobrazení). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T , $\dim P = \dim Q < +\infty$, a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom A je izomorfní, právě když A je monomorfní nebo A je epimorfní.*

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je zřejmá. Ověřujeme tedy pouze $(\Leftarrow)$:

- Je-li A monomorfní, pak $d(A) = 0$ a z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = \dim P$. Protože $\dim P = \dim Q$, máme $h(A) = \dim A(P) = \dim Q$ a zároveň $A(P) \subset \subset Q$. Podle věty 3.6 o vlastnostech podprostorů platí, že $A(P) = Q$, což znamená, že A je „na“ Q .
- Je-li A epimorfní, pak $A(P) = Q$, tudíž $h(A) = \dim Q$. Protože $\dim Q = \dim P$, dostáváme z 2. věty o dimenzi, že $d(A) = 0$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a A je prosté. □

Poznámka 4.46. Speciálně pro lineární operátory $A \in \mathcal{L}(P)$ na prostorech konečné dimenze předchozí věta říká, že jsou-li prosté, potom už jsou automaticky „na“ P , a jsou-li „na“ P , pak jsou automaticky prosté.

Věta 4.47 (Izomorfismus doplňků). ★ *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $P, Q, R \subset \subset V$ nad T . Pokud $P \oplus Q = P \oplus R$, potom $Q \cong R$.*

Důkaz. Definujme $A: Q \rightarrow R$ pro každé $\vec{q} \in Q$ jako $A\vec{q} = \vec{r}$, pokud $\vec{q} = \vec{p} + \vec{r}$, kde $\vec{p} \in P$ a $\vec{r} \in R$. Díky direktnosti součtu je A opravdu zobrazení. Zbývá ověřit, že A je izomorfismus.

- A je lineární:
Je-li $\alpha \in T, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$, kde $\vec{q}_1 = \vec{p}_1 + \vec{r}_1$, přičemž $\vec{p}_1 \in P, \vec{r}_1 \in R$, a $\vec{q}_2 = \vec{p}_2 + \vec{r}_2$, přičemž $\vec{p}_2 \in P, \vec{r}_2 \in R$, pak $\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Proto $A(\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2) = \alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \alpha A\vec{q}_1 + A\vec{q}_2$.
- A je prosté:
Uvažujme $\vec{q} \in \ker A$. Poté $A\vec{q} = \vec{0}$, což podle definice A znamená, že $\vec{q} \in P$. Tudíž $\vec{q} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

- A je „na“ R :

Je-li $\vec{r} \in R$, pak existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a právě jedno $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$.

Položme $\vec{q} = -\vec{p} + \vec{r}$. Našli jsme tím $\vec{q} \in Q$ tak, že $A\vec{q} = \vec{r}$. $\square$

4.5 Doplněk na prostoru nekonečné dimenze ★

Nyní již máme v ruce aparát, který nám umožní částečně vyšetřit i doplňky podprostorů v prostorech nekonečné dimenze. Zatímco věta 3.23 říká, že doplněk ke každému podprostoru vektorového prostoru konečné dimenze existuje, odpověď na otázku, zda má každý podprostor vektorového prostoru nekonečné dimenze doplněk, odložíme až do předmětu Funkcionální analýza. Zde si pouze ukážeme, že i podprostory prostorů nekonečné dimenze mají dobře definovanou kodimenzi, a vyslovíme důležitou větu o vztahu hodnoty a kodimenze jádra.

Rozšíříme tedy definici doplňku i pro podprostory vektorových prostorů nekonečné dimenze.

Definice 4.48. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P \subset\subset V$. Nechť $Q \subset\subset V$ splňuje $P \oplus Q = V$. Potom Q nazveme **doplňkem** P do V a jeho dimenzi $\dim Q$ značíme $\text{codim } P$ a nazýváme **kodimenzí** P .

Poznámka 4.49. Korektnost definice kodimenze plyne z věty 4.47 a důsledku 4.44.

Příklad 4.50. Uvedme příklad podprostoru nekonečné dimenze s doplňkem konečné dimenze. Nechť $P_1 \subset\subset \mathcal{P}$ a P_1 je tvořeno polynomy s nulovým konstantním členem. Pak $Q_1 = [e_1]_\lambda$ je doplněk P_1 do $\mathcal{P}$.

Příklad 4.51. Uvedme příklad podprostoru nekonečné dimenze s doplňkem nekonečné dimenze. Nechť $P_2 \subset\subset \mathcal{P}$ a P_2 je tvořeno polynomy s nulovými koeficienty u lichých mocnin proměnné. Potom Q_2 tvořené polynomy s nulovými koeficienty u sudých mocnin je doplněk P_2 do $\mathcal{P}$.

Věta 4.52 (Hodnota a kodimenze jádra). *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $h(A) < +\infty$. Potom platí:*

$$h(A) = \text{codim } \ker A.$$

Důkaz.

- Je-li $h(A) = 0$, pak $A = \Theta$. Zřejmě tedy platí, že $P = \ker A \oplus \{\vec{0}_P\}$ a $\text{codim } \ker A = 0$.
- Je-li $h(A) \in \mathbb{N}$, potom podprostor $\tilde{P}$ o dimenzi rovné $h(A)$ z důkazu 2. věty o dimenzi je doplňkem $\ker A$ do P . (Důkaz tohoto faktu totiž na konečnosti dimenze P nezávisel.) Jelikož již víme, že kodimenze je dobře definovaná na prostorech libovolné dimenze, dostáváme, že $\text{codim } \ker A = h(A)$. $\square$

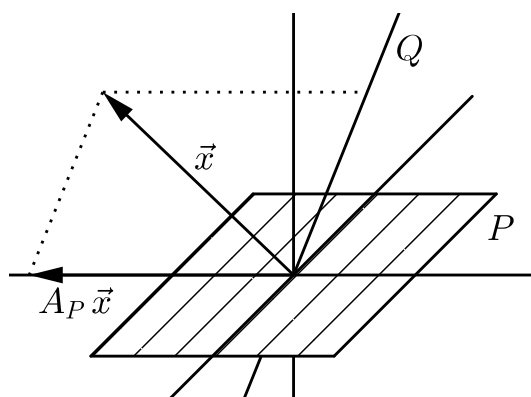
4.6 Projektor ★

Definice 4.53. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset\subset V$. Necht dále $P \oplus Q = V$. Definujme $A_P : V \rightarrow P$ jako $A_P \vec{x} := \vec{p}$, kde $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$, přičemž $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$. Zobrazení A_P nazýváme **projektorem** na podprostor P podle podprostoru Q . (Viz obrázek 9.)

Věta 4.54 (Projektor). Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset\subset V$. Necht dále $P \oplus Q = V$. Pak projektor A_P z definice 4.53 splňuje:

1. $A_P \in \mathcal{L}(V, P)$.
2. $A_P \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \in P$.
3. $A_P \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in Q$.
4. A_P je „na“ P a $\ker A = Q$.

Důkaz. Fakt, že A_P je zobrazení, plyne z direktnosti součtu. Ověříme linearitu A_P . Necht $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha \in T$. Pokud $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$, kde $\vec{p}_1 \in P$ a $\vec{q}_1 \in Q$, a $\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$, kde $\vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_2 \in Q$, potom $\alpha \vec{x} + \vec{y} = (\alpha \vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha \vec{q}_1 + \vec{q}_2)$. Dostáváme $A_P \vec{x} = \vec{p}_1$, $A_P \vec{y} = \vec{p}_2$ a $A_P(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \alpha A_P \vec{x} + A_P \vec{y}$. Zbylé vlastnosti plynou bezprostředně z definice projektoru. $\square$



Obrázek 9: Projektor na P podle Q .

Poznámka 4.55. Symbol A_P neurčuje projektor jednoznačně. Doplnků podprostoru P může existovat více a projektor A_P závisí i na volbě doplnku.

Úkol 4.56. * Dokažte známou vlastnost projektorů: Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom A je projektor na $A(V)$ podle $\ker A$ právě tehdy, když $A^2 = A$. (Přičemž A^2 je zkrácený zápis složeného zobrazení $A \circ A$.)

Příklad 4.57. Uvedme příklad projektoru na prostoru nekonečné dimenze. Ilustrujme pro něj platnost rovnosti $A^2 = A$. Necht $P_1 \subset \mathcal{P}$ a P_1 obsahuje polynomy s nulovým konstantním členem. Poté už z příkladu 4.50 víme, že $Q_1 = [e_1]_\lambda$ je doplněk P_1 do $\mathcal{P}$. Projektor na P_1 podle Q_1 splňuje pro každé $p \in \mathcal{P}$, kde $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$, že $(A_{P_1} p)(t) = \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Je tedy zřejmé, že $A_{P_1}^2 = A_{P_1}$.

4.7 Duální báze ★

V této kapitole zavzpomínáme na asistenta Pytlíčka, který měl následující větu o duální bázi označenou ve skriptech i na přednášce jako Větu 20. Byla podle něj zlomovým přechodem k abstraktnímu myšlení.

Věta 4.58 (Věta 20). *Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T . Potom $\mathcal{X}^\# := (x_1^\#, x_2^\#, \dots, x_n^\#)$ je báze $V^\#$ a pro každé $\varphi \in V^\#$ platí:*

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\mathcal{X}^\#$ je báze $V^\#$.

- Funkcionály (vektory duálního prostoru) $x_1^\#, x_2^\#, \dots, x_n^\#$ jsou LN:
Necht pro $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ platí, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\# = \Theta$, poté pro každé $\vec{y} \in V$ máme podle definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem:

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#\right)(\vec{y}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#(\vec{y}) = 0.$$

Dosadíme-li za vektor $\vec{y}$ postupně všechny bazické vektory $\vec{x}_i$, dostaneme podle věty 2.58 pro každé $i \in \hat{n}$:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#(\vec{x}_i) = \alpha_i = 0.$$

- Funkcionály $x_1^\#, x_2^\#, \dots, x_n^\#$ generují $V^\#$:
Necht $\varphi \in V^\#$ a necht $\vec{y} \in V$. Označme $\alpha_i = x_i^\#(\vec{y})$. Potom díky linearitě φ máme:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{y}) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#(\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#\right)(\vec{y}), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost vychází z definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem. Vidíme tak, že $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#$.

Tvrzení o souřadnicích $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$ plyne z předchozího bodu. □

Definice 4.59. Bázi $\mathcal{X}^\#$ z předchozí věty nazýváme **duální bází** k $\mathcal{X}$.

Vraťme se na závěr kapitoly k motivačnímu textu. Definovali jsme v něm obyčejnou lineární diferenciální rovnici řádu n :

$$f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = q(x), \quad (3)$$

přičemž $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řešit takovou rovnici znamená nalézt všechny reálné funkce f splňující rovnost (3) pro každé x z intervalu I . Definujme pro každé $x \in I$:

$$(Af)(x) := f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x).$$

Pak lze ukázat, že A je lineární zobrazení $\mathcal{C}^{(n)}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$, kde $\mathcal{C}^{(n)}(I)$ je vektorový prostor funkcí se spojitými derivacemi až do řádu n na intervalu I a $\mathcal{C}(I)$ je vektorový prostor funkcí spojitých na I . Strukturu řešení rovnice (3) proto popisuje věta 4.36. Vždy bude tvaru $a + [f_1, f_2, \dots, f_n]_\lambda$, přičemž a je funkce, která řeší rovnici (3), zatímco $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou LN řešení rovnice (3) po vynulování pravé strany (tj. místo $q(x)$ si představujeme 0).

Ilustrujme na obyčejné lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty konkrétní tvar množiny řešení. Nechť je dána rovnice:

$$f'''(x) - 4f''(x) + 5f'(x) - 2f(x) = -8e^x.$$

Potom množina řešení (ověřte dosazením, že jde o řešení) je tvaru:

$$a + [f_1, f_2, f_3]_\lambda,$$

kde $a(x) = 4x^2e^x$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$, $f_3(x) = e^{2x}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Zakončeme partii o lineárních zobrazeních opět slovy asistenta Pytlíčka (tentokrát budou povzbudivá): „Kapitolou lineárních zobrazení abstrakce předmětu LA vyvrcholila a teď už půjdeme jenom dolů.“

5 Frobeniova věta

V této kapitole prozkoumáme vztah mezi lineárními zobrazeními a maticemi. Zjistíme, že na prostorech konečné dimenze lze tvrdit: „Lineární zobrazení a matice jedno jest.“ Nejprve zavedeme novou operaci s maticemi, a sice násobení. Umožní nám zapsat soustavu LAR jednodušším způsobem: maticovým zápisem. Poté definujeme také pro matice pojem hodnost, s jehož pomocí zformulujeme Frobeniovu větu. Tím završíme problematiku řešení soustav LAR. Jelikož je Frobeniova věta jednou z nejdůležitějších vět celé lineární algebry, pojmenovali jsme pátou kapitolu právě po ní. Ferdinand Georg Frobenius vyslovil větu až na počátku 20. století. Křivolaké cestě k řešení soustav LAR je věnován dodatek skript pro letní semestr Lineární algebra 2.

5.1 Matice a lineární zobrazení

Již známe $T^{m,n}$ vektorový prostor matic s prvky z tělesa T o m řádcích a n sloupcích, říkáme, že jsou typu $m \times n$. Víme, že sčítání matic a násobení matice číslem z T je definováno po prvcích. Nyní zavedeme další operaci – násobení matic.

Definice 5.1. Nechť T je těleso. Nechť $A \in T^{m,n}$ a $B \in T^{n,p}$. Pak **součinem** A a B nazveme matici typu $m \times p$, značíme ji AB nebo $A \cdot B$, definovanou

$$[AB]_{ij} := \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad \text{pro každé } i \in \widehat{m}, j \in \widehat{p}.$$

Příklad 5.2. Nechť $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $AB = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ a $BA = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 17 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Věta 5.3 (Vlastnosti násobení matic). *Nechť T je těleso. Násobení matic má následující vlastnosti:*

1. Je asociativní, tj. pro $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$ a $C \in T^{p,s}$ platí, že $(AB)C = A(BC)$.
2. Je distributivní vůči sčítání, tj. pro $A \in T^{m,n}$ a $B, C \in T^{n,p}$ platí, že $A(B + C) = AB + AC$.
3. Není obecně komutativní, ani když násobíme čtvercové matice, tj. existují čtvercové matice A a B s prvky z T takové, že $AB \neq BA$.
4. Je-li A typu $n \times n$ (nazýváme ji **čtvercovou maticí řádu n**)³³ a je-li I **jednotková**, tj. $I_{ij} := \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, potom $AI = IA = A$.³⁴

³³V literatuře narazíme i na termín čtvercová matice stupně n .

³⁴Často se jednotková matice značí též E nebo 1 .

Důkaz.

1. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Proto matice $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}$ je typu $m \times s$. Jelikož $\mathbb{B}\mathbb{C}$ je typu $n \times s$, je $\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$ také typu $m \times s$.

Nyní stačí ukázat, že pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{s}$ platí, že $[(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}$. Podle definice násobení matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} [(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} &= \sum_{k=1}^p [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ik} \mathbb{C}_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbb{A}_{i\ell} \mathbb{B}_{\ell k} \right) \mathbb{C}_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^n \mathbb{A}_{i\ell} \mathbb{B}_{\ell k} \mathbb{C}_{kj} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^p \mathbb{A}_{i\ell} \mathbb{B}_{\ell k} \mathbb{C}_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{A}_{i\ell} \sum_{k=1}^p \mathbb{B}_{\ell k} \mathbb{C}_{kj} = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{A}_{i\ell} [\mathbb{B}\mathbb{C}]_{\ell j} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}. \end{aligned}$$

2. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{B} + \mathbb{C}$ je typu $n \times p$, proto $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})$ je typu $m \times p$. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ i $\mathbb{A}\mathbb{C}$ jsou typu $m \times p$, proto jejich součet $\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$ je také typu $m \times p$.

Nyní stačí ověřit, že pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{p}$ platí, že $[\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}$. Podle definice násobení a sčítání matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} [\mathbb{B} + \mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} (\mathbb{B}_{kj} + \mathbb{C}_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} \mathbb{B}_{kj} + \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} \mathbb{C}_{kj} = [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} + [\mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}. \end{aligned}$$

3. Je-li $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ typu $n \times p$, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Aby $\mathbb{B}\mathbb{A}$ existovala, musí být $m = p$, rozměr $\mathbb{B}\mathbb{A}$ je potom $n \times n$. Aby $\mathbb{A}\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A}$ měly stejný rozměr, musí být tudíž $m = p = n$, neboli $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ musejí být čtvercové stejného řádu.

Ani tehdy ale rozhodně nemusí rovnost platit. Například pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Tento bod ponecháme k ověření čtenáři. □

Poznámka 5.4. Při znalosti násobení matic lze soustavu m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

zapsat **maticovým (vektorovým) zápisem** jako $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice 5.5. Necht P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T , přičemž $n, m \in \mathbb{N}$. Necht $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m . Pak matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$, jejíž j -tý sloupec je definován jako $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} := (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$, nazýváme **maticí zobrazení** A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Je-li $A \in \mathcal{L}(P_n)$ a $\mathcal{X}$ je báze P_n , pak místo ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ píšeme obvykle ${}^{\mathcal{X}}A$.

Poznámka 5.6. Označme $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bázi $\mathcal{Y}$, potom lze popsat prvky matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ pomocí souřadnicových funkcionalů v bázi $\mathcal{Y}$. Pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ platí:

$$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = y_i^{\#}(A\vec{x}_j).$$

Poznámka 5.7. Chceme-li zapsat ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ rovnou jako matici, můžeme psát:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} \ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} \ \dots \ (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}).$$

Věta 5.8 (Vlastnosti matice zobrazení). Necht P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht dále $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m . Necht $\alpha \in T$ a $A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Pak platí:

1. ${}^{\mathcal{X}}(A + B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz.

1. Porovnáme j -té sloupce matic pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\begin{aligned} [{}^{\mathcal{X}}(A + B)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} &= ((A + B)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(definice matice zobrazení)} \\ &= (A\vec{x}_j + B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(definice součtu zobrazení)} \\ &= (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} + (B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(aditivita souřadnicového izomorfismu)} \\ &= [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} + [{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} && \text{(definice matice zobrazení)} \\ &= [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} && \text{(definice součtu matic).} \end{aligned}$$

2. Postupujeme analogicky jako v prvním bodě. Porovnáme j -té sloupce matic pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$[{}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((\alpha A)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (\alpha(A\vec{x}_j))_{\mathcal{Y}} = \alpha(A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = \alpha[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [\alpha {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}. \quad \square$$

Věta 5.9 (Výpočet obrazu vektoru). *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m . Potom pro každé $\vec{x} \in P_n$ platí:*

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

Důkaz. $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ je vektor z T^m a ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ je součin matic typu $m \times n$ a $n \times 1$, jde tedy o matici z $T^{m,1} = T^m$. Rozměry jsou tudíž shodné. Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ bázi $\mathcal{X}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Poté máme: $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \left(A \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j\right)\right)_{\mathcal{Y}} = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A\vec{x}_j\right)_{\mathcal{Y}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$. Ve druhé rovnosti jsme využili linearitu A a ve třetí rovnosti linearitu souřadnicového izomorfismu v bázi $\mathcal{Y}$. Nyní už stačí si rozmyslet podle definice násobení matic, že platí:

$$\alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \dots + \alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} \ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} \ \dots \ (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

□

Příklad 5.10. Je-li speciálně $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$, pak podle věty 5.9 platí:

$$A\vec{x} = {}^{\varepsilon_n}A^{\varepsilon_m}\vec{x}.$$

Neboli působení takového zobrazení na vektor odpovídá násobení vektoru odpovídající maticí ve standardních bázích.

- Rozmyslete si, jakými maticemi jsou určeny operátory na $\mathbb{R}^2$ z příkladu 4.4.
- Dále si rozmyslete, jak jednotlivé operátory působí na různé útvary v $\mathbb{R}^2$. Na obrázku 10 je vyznačeno, jak vypadají obrazy jednotkové kružnice při zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, má-li $\mathbb{A} = {}^{\varepsilon_2}A$ podobu:

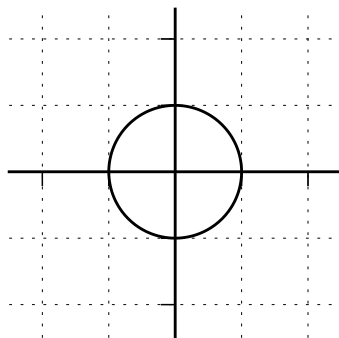
$$(a) \ \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad (b) \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d) \ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úkol 5.11. Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T , přičemž $n, m \in \mathbb{N}_0$. Určete $\dim \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. (Jako nápoředu uvádíme, že by se čtenáři mohl k řešení úkolu hodit pojem matice v bázích.)

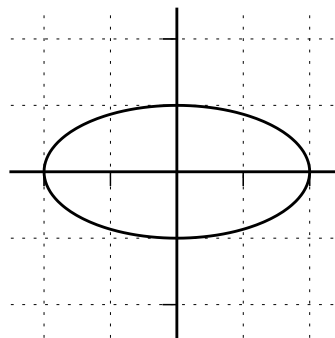
Poznámka 5.12. Věta 5.9 o výpočtu obrazu vektoru umožňuje přeformulovat úlohu řešit rovnici $A\vec{x} = \vec{b}$ na řešení soustavy LAR (samozřejmě pouze na prostorech konečné dimenze).

Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m . Dále nechť $\vec{b} \in A(P_n)$ a nechť je zadána matice zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Z věty 4.36 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení.

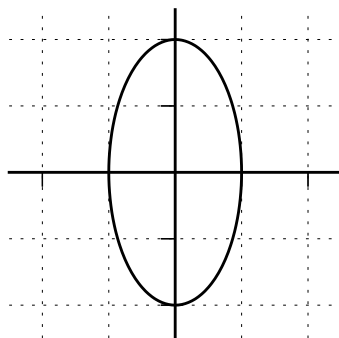
(a)



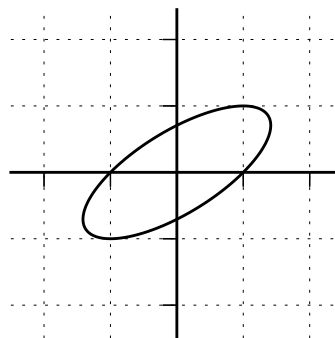
(b)



(c)



(d)



Obrázek 10: Obrazy jednotkové kružnice při působení různých lineárních operátorů na $\mathbb{R}^2$.

- (a) $\ker A$: Z hodnoty $h(A)$, kterou umíme z matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ určit, spočítáme defekt $d(A)$ a poté najdeme bázi jádra následujícím způsobem:

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{0})_{\mathcal{Y}}.$$

Jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít $d(A)$ lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Tím získáme souřadnice bazických vektorů z jádra v bázi $\mathcal{X}$.

- (b) Partikulární řešení $\vec{a}$:

$$A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = (\vec{b})_{\mathcal{Y}}.$$

Jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a pravou stranou $(\vec{b})_{\mathcal{Y}}$.

Příklad 5.13. Necht $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi $\mathcal{X}$

rovnou ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) $\ker A$: Z matice ${}^{\mathcal{X}}A$ vidíme, že

$$\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h(A) = \dim A(\mathbb{R}^3) = \dim A \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \right) = \dim \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} = 2,$$

proto $d(A) = 1$. Dále

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{0})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít jedno LN řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Takovým řešením je například $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tudíž $\ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$.

(b) Partikulární řešení $\vec{a}$: Nejprve si uvědomíme platnost ekvivalence:

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A$ a pravou stranou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Řešením je například $(\vec{a})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Závěr: } A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

V historii se objevilo více způsobů definice násobení matic, ale díky souvislosti se skládáním zobrazení, kterou ukáže následující věta, zvítězila definice dnešní.

Věta 5.14 (Matice složeného zobrazení). Necht P_n, Q_m, V_s jsou vektorové prostory nad tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$ a $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Necht $\mathcal{X}$ je báze P_n , $\mathcal{Y}$ je báze Q_m a $\mathcal{Z}$ je báze V_s . Potom platí:

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Zkontrolujme nejprve rozměry matic. ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times n$. ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times m$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ je typu $m \times n$, proto jejich součin je rovněž typu $s \times n$.

Ověřme rovnost j -tých sloupců pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}]_{\bullet j} = ((AB)\vec{x}_j)_{\mathcal{Z}} = (A(B\vec{x}_j))_{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [{}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Předposlední rovnost plyne z věty 5.9 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích. Uvědomíme-li si, že $(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$ je j -tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$, plyne poslední rovnost z definice násobení matic (j -tý sloupec součinu dvou matic se totiž získá jako součin první matice s j -tým sloupcem druhé matice). $\square$

Poznámka 5.15. Věta 5.14 o matici složeného zobrazení umožňuje pomocí „vnášení identity“ mechanické převody matice zobrazení v nějakých bázích na matici téhož zobrazení v jiných bázích.

Zavedme nejprve pojem matice přechodu, s jeho použitím pak představíme metodu vnášení identity.

Definice 5.16. Necht $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T . Pak **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$.

Název matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ plyne ze vztahu:

$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}},$$

který umožňuje pro každé $\vec{x} \in V_n$ vypočítat jeho souřadnice v bázi $\mathcal{Y}$ pomocí matice přechodu ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ a pomocí jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$.

Příklad 5.17. Necht jsou dány báze $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

Necht dále $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi $\mathcal{X}$ rovnu ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$.

Řešení: Pro identický operátor I na $\mathbb{R}^3$ jistě platí, že $B = IB = BI$.

$${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}(IB)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B.$$

Jelikož ${}^{\mathcal{X}}B$ známe, zbývá určit matici přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$:

$${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} \ (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} \ (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}}) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{Y}} \ \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{Y}} \ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{Y}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Závěr: } {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úlohu lze řešit i bez využití věty 5.14. Čtenář jistě sám vymyslí takový postup.

5.2 Hodnost matice

Zatím známe pojem hodnost lineárního zobrazení. Nyní si zavedeme hodnost matice a prozkoumáme její vlastnosti a souvislost s hodností lineárního zobrazení. T bude všude značit číselné těleso, m, n, p přirozená čísla.

Definice 5.18. Necht $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. **Hodnost matice** $h(\mathbb{A})$ je definována jako

$$h(\mathbb{A}) := \dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_{\lambda}.$$

Slovy: „ $h(\mathbb{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$.“

Vyšetřování hodnosti matice je tudíž podobné vyšetřování LZ a LN vektorů. Matici upravíme do horního stupňovitého tvaru (z definice je jasné, že ekvivalentní řádkové úpravy hodnost matice nemění). Pak můžeme určit hodnost matice jako počet hlavních sloupců.

Příklad 5.19. Spočtěte hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V horním stupňovitém tvaru jsou první, druhý a čtvrtý sloupec hlavní, tedy $h(\mathbb{A}) = 3$.

Úkol 5.20. Rozmyslete si, že jsou-li $\tilde{T}, T$ tělesa a $\tilde{T} \subset T$ a je-li $\mathbb{A} \in \tilde{T}^{m,n}$ (tudíž také $\mathbb{A} \in T^{m,n}$), potom pro hodnost $h(\mathbb{A})$ platí, že vyjde stejná, ať ji počítáme nad tělesem $\tilde{T}$, či T . Využijte faktu, že převod na horní stupňovitý tvar ekvivalentními řádkovými úpravami nemění hodnost matice.

5.3 Vztah hodnosti matice a zobrazení

Ukažme, jak úzce spolu hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení souvisí.

Věta 5.21 (Hodnost zobrazení a hodnost matice). *Necht P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Necht $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m . Pak*

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

Důkaz. Stačí, abychom rozepsali, co je $h(A)$ a co je $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

$$h(A) = \dim A(P_n) = \dim A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_{\lambda}) = \dim [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_{\lambda} = \dim V,$$

kde $V = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_{\lambda}$.

$$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_{\lambda} = \dim W,$$

přičemž $W = [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_{\lambda}$.

Je snadné nahlédnout, že souřadnicový izomorfismus $(\cdot)_{\mathcal{Y}}: Q_m \rightarrow T^m$ zobrazuje V na W , proto W je izomorfní s V . Z věty 4.43 víme, že pro prostory W, V s konečnou dimenzí platí, že $W \cong V \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. $\square$

Poznámka 5.22. Necht $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in T^n$. Poté zřejmě platí, že $\mathbb{A}$ je rovna matici A ve standardních bázích, tj. $\mathbb{A} = \varepsilon_n A \varepsilon_m$, tedy podle věty 5.21 je $h(A) = h(\mathbb{A})$.

5.4 Regulární a singulární matice

Nyní zavedeme pojem regulární matice, který se bude opakovaně objevovat i v letním semestru. Postupně totiž vyslovíme tvrzení, která budou regulární matice charakterizovat pomocí různých vlastností: jednoznačnost řešení příslušné soustavy LAR, existence inverzní matice, nenulový determinant, nenulová vlastní čísla atd.

Definice 5.23. Necht $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ se nazývá **regulární**, pokud $h(\mathbb{A}) = n$. V opačném případě se $\mathbb{A}$ nazývá **singulární**.

Věta 5.24 (Izomorfismus a regulární matice). *Necht P_n a Q_n jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$. Dále necht $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ báze Q_n . Potom A je izomorfismus právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.*

Důkaz. Pro $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ z věty 4.45 o jednodušším ověření izomorfnosti zobrazení víme, že A je „na“ Q_n (tj. $h(A) = n$) právě tehdy, když A je izomorfismus. Poté už stačí použít větu 5.21, která dává rovnost $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. $\square$

Z věty 5.24 plyne souvislost pojmů regulární operátor a regulární matice:

Důsledek 5.25 (Regulární operátor a regulární matice). *Necht P_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P_n)$. Necht dále $\mathcal{X}$ je báze P_n . Pak A je regulární operátor právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A$ je regulární matice.*

5.5 Frobeniova věta

Již na začátku semestru jsme se naučili zjistit, zda má soustava LAR řešení, zda má více řešení, a jedno řešení umíme najít. Mnozí umějí najít i všechna řešení soustavy LAR s pravou stranou – za neznámé odpovídající vedlejším sloupcům po převedení matice soustavy do horního stupňovitého tvaru volí libovolně a zbylé neznámé dopočítají. Frobeniova věta zformuluje elegantně pomocí nového pojmu hodnost matice podmínku řešitelnosti soustavy LAR s pravou stranou a prozradí počet LN řešení homogenní soustavy.³⁵ Dále popíše tvar množiny všech řešení právě pomocí řešení homogenní soustavy.

Obvykle tečku $\cdot$ při násobení matic vynecháváme. Ve Frobeniově větě a jejím důkazu nikoliv, protože tak zdůrazňujeme rozdíl mezi součinem matic $\mathbb{A} \cdot \vec{x}$ a působením zobrazení na vektor $A\vec{x}$.

Věta 5.26 (Frobeniova). *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\vec{b} \in T^m$. Potom pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{4}$$

platí:

1. *Soustava (4) má řešení právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, tj. právě tehdy, když hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*
2. *Označme S_0 množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$, tj.*

$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}.$$

Pak $S_0 \subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.

3. *Nechť $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Potom množina všech řešení soustavy (4), tj.*

$$S = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\},$$

*má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde $\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Vektor $\vec{a}$ nazýváme **partikulárním řešením**.*

Důkaz.

1. Tvrzení plyne z následující série ekvivalencí:

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b}) \Leftrightarrow$$

³⁵Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), německý matematik. Jak se dozvíte v dodatku skript Lineární algebra 2, větu o řešení soustav LAR dokázal Frobenius v dnešním znění roku 1905. Ovšem její jednotlivé body byly známy, byť třeba v trochu jiné podobě, již dříve. Věta by se tedy také mohla jmenovat Dodgsonova, Kroneckerova nebo Capelliova.

- $$\Leftrightarrow \dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_{\lambda} = \dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_{\lambda}$$
- (vlastnost podprostorů:
je-li $P \subset\subset Q$ a $\dim Q < +\infty$, pak $\dim P = \dim Q \Leftrightarrow P = Q$)
- $$\Leftrightarrow [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_{\lambda} = [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_{\lambda}$$
- (vlastnost lineárních obalů)
- $$\Leftrightarrow \vec{b} \in [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_{\lambda}$$
- (definice lineárního obalu)
- $$\Leftrightarrow \text{existuje } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T \text{ tak, že } \alpha_1 \mathbb{A}_{\bullet 1} + \alpha_2 \mathbb{A}_{\bullet 2} + \dots + \alpha_n \mathbb{A}_{\bullet n} = \vec{b}$$
- (definice maticového násobení)
- $$\Leftrightarrow \text{existuje } \vec{x} \in T^n \text{ takové, že } \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$
- $$\Leftrightarrow \text{soustava (4) má řešení.}$$

2. Necht $A: T^n \rightarrow T^m$ je lineární zobrazení definované pro každé $\vec{x} \in T^n$ jako $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$.
Poté pro S_0 platí:

$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \ker A.$$

Z teorie lineárních zobrazení víme, že jádro lineárního zobrazení tvoří podprostor, tj. $S_0 \subset\subset T^n$, a z 2. věty o dimenzi víme, že $\dim S_0 = d(A) = n - h(A) = n - h(\mathbb{A})$, kde poslední rovnost plyne z poznámky 5.22.

3. Uvažujme zobrazení A z předchozího bodu. Jelikož z předpokladu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ plyne, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení, platí také, že $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení. Z věty 4.36 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{b} = A\vec{a}$. Proto $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{b} = \mathbb{A} \cdot \vec{a}$. $\square$

Poznámka 5.27. Zkontrolujme, že Frobeniova věta je v souladu s tím, co známe z praktického počítání.

- (a) Víme, že řešení existuje právě tehdy, když vektor pravé strany tvoří vedlejší sloupec po úpravě rozšířené matice soustavy do horního stupňovitého tvaru. Jelikož hodnota matice odpovídá počtu hlavních sloupců v horním stupňovitém tvaru, je vidět, že rovnost $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ je ekvivalentní s tím, že pravá strana tvoří vedlejší sloupec.
- (b) Umíme najít tolik LN řešení homogenní soustavy, kolik je vedlejších sloupců, a to je rovno $n - h(\mathbb{A})$, protože n je počet sloupců matice a $h(\mathbb{A})$ je počet hlavních sloupců matice.

Z Frobeniovy věty lze odvodit ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 5.28. Homogenní soustava s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má pouze triviální řešení (tj. pouze nulový vektor je řešením), právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.

Důsledek 5.29. Necht $\vec{b} \in T^n$. Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.

5.6 Hodnost součinu matic

Pro hodnost součinu matic platí analogická věta jako pro hodnost složeného zobrazení.

Věta 5.30 (Hodnost součinu matic). *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Potom platí:*

1. $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{A})$. Je-li navíc $n = p$ a $\mathbb{B}$ regulární matice, pak $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) = h(\mathbb{A})$.
2. $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{B})$. Je-li navíc $m = n$ a $\mathbb{A}$ regulární matice, pak $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) = h(\mathbb{B})$.

Důkaz. Pro každé $\vec{x} \in T^n$ definujme $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ (to jest $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$), potom $h(A) = h(\mathbb{A})$ podle poznámky 5.22. Pro každé $\vec{x} \in T^p$ definujme $B\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x}$, (tedy $B \in \mathcal{L}(T^p, T^n)$), pak $h(B) = h(\mathbb{B})$. Potom $AB\vec{x} = (\mathbb{A}\mathbb{B})\vec{x}$, a tudíž $h(AB) = h(\mathbb{A}\mathbb{B})$.

Z věty 4.33 o hodnosti složeného zobrazení víme:

1. $h(AB) \leq h(A)$. Je-li navíc B epimorfnní, potom $h(AB) = h(A)$.
2. $h(AB) \leq h(B)$. Je-li navíc A monomorfnní, pak $h(AB) = h(B)$.

Pokud $n = p$ a $\mathbb{B}$ je regulární matice, potom B je regulární operátor podle důsledku 5.25. Tím spíše je B epimorfnní a rovnost $h(AB) = h(A)$ platí. Je-li $m = n$ a $\mathbb{A}$ je regulární matice, pak A je regulární operátor, tím spíše monomorfnní. Proto $h(AB) = h(B)$. Přímou z definic zobrazení A, B, AB získáme tvrzení věty. Vlastně v předchozích vztazích všude jenom nahradíme zobrazení A, B maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. $\square$

Poznámka 5.31. Obě nerovnosti ve větě 5.30 mohou být ostré. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, poté $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy $0 = h(\mathbb{A}\mathbb{B}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\} = 1$.

5.7 Hodnost transponované matice ★

Velmi zajímavým netriviálním výsledkem je, že v každé matici je počet LN sloupců stejný jako počet LN řádků. K precizní formulaci tohoto tvrzení je třeba nejprve zavést pojem transponovaná matice a k důkazu budeme potřebovat také pojmy komplexně sdružená a hermitovsky sdružená matice.³⁶ A dále využijeme dvě pomocná lemmata.

Definice 5.32. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s komplexními prvky, pak

- (a) matice **transponovaná** k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^T$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{n}$, $j \in \widehat{m}$

$$[\mathbb{A}^T]_{ij} := \mathbb{A}_{ji},$$

- (b) matice **komplexně sdružená** k matici $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, značí se $\overline{\mathbb{A}}$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{m}$, $j \in \widehat{n}$

$$[\overline{\mathbb{A}}]_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ij}},$$

³⁶Charles Hermite [výslovnost „šarl ermit“] (1822–1901), francouzský matematik

- (c) matice **hermitovsky sdružená** k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^H$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{n}$, $j \in \widehat{m}$

$$[\mathbb{A}^H]_{ij} := \overline{[\mathbb{A}]_{ji}},$$

tj. $\mathbb{A}^H = \overline{\mathbb{A}^T}$.³⁷

Poznámka 5.33. Rozmysleme si, že pojmy z definice 5.32 lze zavést i pro matice s prvky z jiného tělesa T . Ovšem u komplexního a hermitovského sdružování je potřeba hlídat, aby šlo o těleso, které je na komplexní sdružování uzavřené, tj. splňuje:

$$\alpha \in T \Rightarrow \bar{\alpha} \in T.$$

Jinak by výsledná matice neměla nutně prvky ze stejného tělesa T .

Příklad 5.34. Necht $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^T$.

Necht $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$, pak $\overline{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -2i & 1-i & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^H = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 5.35 (Vlastnosti $\mathbb{A}^T, \overline{\mathbb{A}}, \mathbb{A}^H$). Necht $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,p}$, potom platí:

1. $\overline{\mathbb{A}^T} = \overline{\mathbb{A}}^T$, $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$, $(\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}$.
2. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$, $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\overline{\mathbb{B}}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H\mathbb{A}^H$.

Důkaz. Vlastnosti plynou z definic a maticového násobení. Čtenář je ověřit bez obtíží sám. □

Lemma 5.36. Necht $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$.

Důkaz. Označme

$$S_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\} \text{ a } \tilde{S}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Ukážeme, že $S_0 = \tilde{S}_0$.

- $\tilde{S}_0 \subset S_0$: Tato inkluze platí, protože splňuje-li $\vec{x}$, že $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, pak $\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{A}^H\vec{0} = \vec{0}$.

³⁷Častá notace hermitovsky sdružené matice k $\mathbb{A}$ je $\mathbb{A}^*$. Pak se ale také setkáme se situací, kdy je hvězdička vyhrazena pro komplexní sdružování, tj. $\mathbb{A}^*$ znamená komplexně sdruženou matici. Hermitovsky sdružená se potom značí například $\mathbb{A}^\#$. Pro matici transponovanou se pro změnu též používá symbol $\mathbb{A}'$.

- $\tilde{S}_0 \supset S_0$: Necht $\vec{x} \in S_0$, tj. $\mathbb{A}^H \mathbb{A} \vec{x} = \vec{0}$. Vynásobíme obě strany rovnosti zleva opruhovaným a transponovaným vektorem $\vec{x}$ (jde tudíž o řádek). Potom $\vec{x}^H \mathbb{A}^H \mathbb{A} \vec{x} = 0$. Podle věty 5.35 máme $\vec{x}^H \mathbb{A}^H = (\mathbb{A} \vec{x})^H$, z čehož plyne $(\mathbb{A} \vec{x})^H \mathbb{A} \vec{x} = 0$. Jelikož $\mathbb{A} \vec{x} \in \mathbb{C}^m$,

můžeme jeho složky označit $\mathbb{A} \vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$. Poté $(\mathbb{A} \vec{x})^H = (\overline{z_1} \ \overline{z_2} \ \dots \ \overline{z_m})$. Dostáváme:

$$(\mathbb{A} \vec{x})^H \mathbb{A} \vec{x} = (\overline{z_1} \ \overline{z_2} \ \dots \ \overline{z_m}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_m|^2 = 0.$$

Odtud plyne, že $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$. Tedy $\mathbb{A} \vec{x} = \vec{0}$, což znamená, že $\vec{x} \in \tilde{S}_0$.

Z Frobeniovy věty víme, že $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A}^H \mathbb{A})$ a $\dim \tilde{S}_0 = n - h(\mathbb{A})$. Jelikož $S_0 = \tilde{S}_0$, máme $h(\mathbb{A}^H \mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$. $\square$

Lemma 5.37. *Pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$ platí, že $h(\mathbb{A}) = h(\overline{\mathbb{A}})$.*

Důkaz. Ukažme, že $h(\mathbb{A}) \leq h(\overline{\mathbb{A}})$. Opačná nerovnost se ukáže tak, že dosadíme $\overline{\mathbb{A}}$ a využijeme toho, že $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$. Je-li $h(\mathbb{A}) = 0$, pak nerovnost platí triviálně. Je-li $h(\mathbb{A}) = k \in \mathbb{N}$, potom existují vzájemně různé indexy $j_1, j_2, \dots, j_k \in \hat{n}$ tak, že vektory $\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k}$ jsou LN. Dokažme sporem, že poté $\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k}$ jsou také LN vektory, a tedy $h(\overline{\mathbb{A}}) \geq k$.

Pokud by byly vektory $\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k}$ LZ, pak by existovala čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, přičemž alespoň jedno z nich by bylo nenulové a $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i} = \vec{0}$. Potom by ovšem platilo:

$$\vec{0} = \overline{\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i}} = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i} \mathbb{A}_{\bullet j_i}.$$

To by byla ale netriviální LK sloupců matice $\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k}$ rovná nulovému vektoru, a tedy bychom dostali spor s jejich lineární nezávislostí. $\square$

Nyní máme prostředky na to, abychom dokázali větu o hodnotě transponované matice. Nejprve vyslovíme tvrzení pro matice s komplexními prvky. Posléze si rozmyslíme, že platí pro matice s prvky z libovolného tělesa.

Věta 5.38. *Necht $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.*

Slovy: „Každá komplexní matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Důkaz. Na jednu stranu máme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^H \mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^H) = h(\overline{\mathbb{A}^T}) = h(\mathbb{A}^T)$, kde bylo v první rovnosti využito lemma 5.36, v nerovnosti věta 5.30 o hodnotě součinu matic, v další rovnosti definice hermitovsky sdružené matice a v poslední rovnosti lemma 5.37. Jelikož $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, musí ovšem platit i obrácená nerovnost. Stačí do nerovnosti místo $\mathbb{A}$ dosadit $\mathbb{A}^T$. $\square$

Věta 5.39 (Hodnost transponované matice). *Nechť $\mathbb{A}$ je libovolná matice s prvky z tělesa T . Potom $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.*

Slovy: „Každá matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Důkaz. Dokázali jsme větu pro speciální případ $T = \mathbb{C}$. Jak si čtenář jistě rozmyslel v úkolu 5.20, je hodnost matice s prvky z tělesa T stejná, ať ji počítáme nad tělesem T , či nad $\mathbb{C}$. Proto tvrzení věty 5.39 plyne z věty 5.38. $\square$

Úkol 5.40. **

1. Vymyslete konkrétní číselné těleso T , které není uzavřené na komplexní sdružování. Pokud bychom takovým tělesem nahradili $\mathbb{C}$ v předpokladech, lemmata 5.36 a 5.37 by neměla dobrý smysl.
2. Důkaz rovnosti mezi hodností matice a matice k ní transponované lze provést také pomocí úpravy do horního stupňovitého tvaru, která hodnost nemění. Sami takový důkaz navrhnete.

Přemýšlivý čtenář se jistě ptá, proč jsme neprovedli důkaz věty 5.39 pomocí úpravy do horního stupňovitého tvaru rovnou, a místo toho provádíme důkaz pomocí lemmat 5.36 a 5.37. Dali jsme mu přednost, protože jsme v něm využili svých čerstvých znalostí Frobeniovy věty a hodnosti součinu matic. Navíc jde opět o vzpomínku na asistenta Pytlíčka, kterému tento důkaz poslal jeho bývalý student, v té době již pracující. Třeba i čtenář těchto skript, až bude jednou sedět před obrazovkou počítače v kanceláři, bude ještě rád vzpomínat na hodiny matematiky a vymýšlení elegantních důkazů se mu stane koníčkem.

6 Lineární geometrie ★

Motivace. Pojem lineární varieta, který budeme v této kapitole studovat z nejrůznějších úhlů pohledu, není žádnou umělou konstrukcí. Příkladem lineární variety je totiž množina řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je lineární zobrazení, nebo také množina řešení soustavy LAR.

V této kapitole zobecníme poznatky ze střední školy týkající se analytické geometrie. Prvky vektorového prostoru už nebudeme nazývat výhradně vektory – častěji budeme hovořit o bodech.

6.1 Lineární variety

K definici lineární variety potřebujeme pojem spojnice bodů.

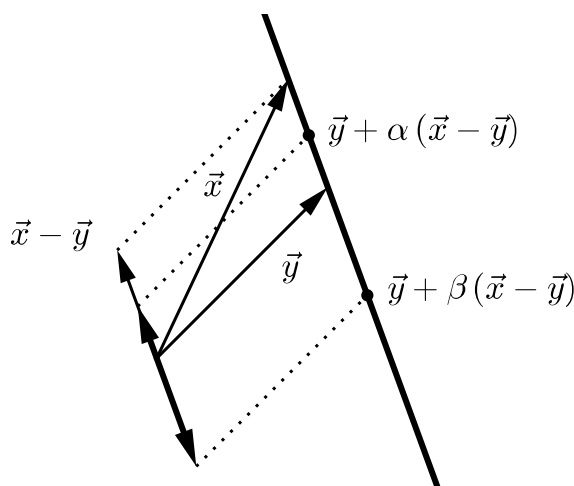
Definice 6.1. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Spojnicí** bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in T\}.$$

Poznámka 6.2. Uvedme ekvivalentní zápisy spojnice:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in T\} = \{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in T\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in T\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že spojnici bodů $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ získáme přičítáním reálných násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$. Tedy v $\mathbb{R}^2$ odpovídá spojnice tomu, co si pod tímto pojmem každý představí – přímce procházející body $\vec{x}$ a $\vec{y}$, viz obrázek 11.



Obrázek 11: Spojnice bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Definice 6.3. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $W \subset V$. Potom W nazveme **lineární varietou**, pokud platí:

- $W \neq \emptyset$,
- W obsahuje s každými dvěma body i jejich spojnici.³⁸

Příklad 6.4. Samotný bod v $\mathbb{R}^2$ vyhovuje definici lineární variety. Stejně tak i přímka a celé $\mathbb{R}^2$. Lineárními varietami v $\mathbb{R}^3$ jsou body, přímky, roviny a celé $\mathbb{R}^3$. Zanedlouho ukážeme, že tento výčet je úplný, tj. že žádné jiné variety v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ neexistují.

6.2 Afinní obaly

Se spojnicí úzce souvisí pojem afinní obal.

Definice 6.5. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Pak **afinní kombinací** (AK) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která navíc splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$. Množinu všech afinních kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ nazýváme jejich **afinním obalem** a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Platí tudíž:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha := \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \mid \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1 \text{ a } \alpha_k \in T \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right\}.$$

Poznámka 6.6. Přímo z definice plyne, že afinní obal dvou vektorů je roven jejich spojnici.

Souvislost afinních obalů a lineárních variet je shrnuta v následujících třech větách.

Věta 6.7 (Afinní obal je varieta). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a necht jsou dány vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ z V . Potom $W = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta a W obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Protože $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_\ell$ pro každé $i \in \hat{\ell}$, je $\vec{x}_i$ afinní kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$, tedy $\vec{x}_i \in W$. Proto $W \neq \emptyset$. Necht $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 1$. Pro libovolné $\alpha \in T$ je třeba ukázat, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W$.

$$\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1 - \alpha)\beta_i) \vec{x}_i,$$

kde poslední výraz je afinní kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$, protože

$$\sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1 - \alpha)\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

Tím je dokázáno, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W$ pro libovolné $\alpha \in T$. Proto spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$ patří do W , což znamená, že W je lineární varieta. $\square$

³⁸Jiný používaný název pro lineární varietu je afinní podprostor.

Věta 6.8 (Varieta obsahuje afinní kombinace). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V . Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z W . Potom platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \subset W.$$

Slovy: „Lineární varieta obsahuje s libovolnými svými body i všechny jejich afinní kombinace.“

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu vektorů ℓ . Pro $\ell = 1$ triviálně platí. Necht pro nějaké $\ell \geq 1$ platí, že W s každými ℓ vektory obsahuje i jejich libovolnou afinní kombinaci. Uvažujme nyní $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell+1} \in W$ a jejich libovolnou afinní kombinaci, tj. $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$. Určitě existuje index $i_0 \in \widehat{\ell+1}$ takový, že $\alpha_{i_0} \neq 1$. Pak můžeme psát:

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} \vec{x}_i,$$

kde $\vec{y} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} \vec{x}_i$ je afinní kombinace ℓ vektorů, protože $\sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} = 1$. Tudíž podle indukčního předpokladu platí, že $\vec{y} \in W$. Jelikož je $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \vec{y}$ vektor ze spojnice $\vec{x}_{i_0}$ a $\vec{y}$, dostáváme, že $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \vec{y}$ leží též ve W . $\square$

Věta 6.9 (Minimalita afinního obalu). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Potom $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je nejmenší (ve smyslu inkluze) lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

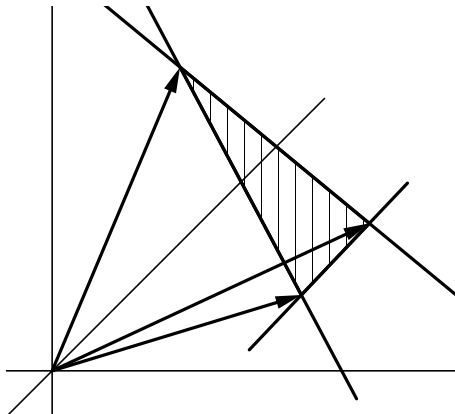
Důkaz. Z věty 6.8 víme, že každá lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Jelikož zároveň z věty 6.7 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta, máme dokázáno, že je to nejmenší lineární varieta obsahující dané vektory. $\square$

Poznámka 6.10. Podle věty 6.9 je řešením úlohy najít minimální lineární varietu W , která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, afinní obal $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.

Příklad 6.11. Pomocí věty 6.9 si rozmyslete, jak vypadají afinní obaly jednoho, dvou nebo tří vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Například $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$, kde $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$ neleží v jedné přímce, tvoří rovinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$.

Řešení: Jelikož jde o lineární varietu, musí W obsahovat spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$, $\vec{x}$ a $\vec{z}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$. Dále musí W také obsahovat spojnice bodů ze tří výše uvedených spojnic. Tudíž W obsahuje rovinu, v níž leží trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 12. Jelikož rovina už je lineární varieta, našli jsme nejmenší lineární varietu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi lineárními varietami a afinními obaly napadnout, zní: „Je každá lineární varieta afinním obalem nějakých vektorů?“ Odpověď zní: ANO, má-li V konečnou dimenzi, NE, je-li $\dim V = +\infty$. Ale musíme nejprve prostudovat vztah mezi varietami a posunutými podprostory, abychom odpověď mohli zdůvodnit.



Obrázek 12: Afinní obal tří vektorů v $\mathbb{R}^3$, které neleží v jedné přímce, je rovina obsahující trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

6.3 Variety jako posunuté podprostory

Následující dvě věty vysvětlují, že variety nejsou ničím zcela novým, ale jde jen o posunuté podprostory.

Věta 6.12 (Posunutý podprostor je varieta). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T , $P \subset\subset V$ a $\vec{a} \in V$. Potom $\vec{a} + P$ je lineární varieta.*

Důkaz. Označme $W = \vec{a} + P$ a ověřme, že W má vlastnosti variety.

- Protože $\vec{0} \in P$, je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \in W$. Tudíž $W \neq \emptyset$.
- Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}_1$ a $\vec{y} = \vec{a} + \vec{p}_2$. Pro libovolné $\alpha \in T$ potom platí, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} = \vec{a} + \alpha\vec{p}_1 + (1 - \alpha)\vec{p}_2 \in \vec{a} + P$. $\square$

Poznámka 6.13. Speciálně je podle předchozí věty každý podprostor lineární varietou.

Poznámka 6.14. Množina řešení dané soustavy lineárních algebraických rovnic je lineární varieta. Z Frobeniovy věty víme, že má tvar $\vec{a} + S_0$, kde S_0 je množina řešení homogenní soustavy, tedy podprostor.

Věta 6.15 (Varieta je posunutý podprostor). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V . Pak existuje právě jeden $P \subset\subset V$ takový, že pro každé $\vec{a} \in W$ platí, že $W = \vec{a} + P$.*

Důkaz. Postup bude mít tři kroky.

- Existence podprostoru:
Uvažujme libovolné $\vec{a} \in W$. Položme $P = W - \vec{a} = \{\vec{x} - \vec{a} \mid \vec{x} \in W\}$. Ukážeme, že $P \subset\subset V$.

(a) $P \neq \emptyset$, protože $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a} \in P$.

(b) Je-li $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\alpha \in T$, pak existují $\vec{x}, \vec{y} \in W$ takové, že $\vec{p}_1 = \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{p}_2 = \vec{y} - \vec{a}$.

Potom máme:

$$\alpha \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\alpha \vec{x} - \alpha \vec{a} + \vec{y}) - \vec{a} \in W - \vec{a},$$

kde jsme využili faktu, že $\alpha \vec{x} - \alpha \vec{a} + \vec{y}$ je afinní kombinace vektorů z variety, což je podle věty 6.8 opět vektor z variety.

- Libovolnost ve výběru vektoru $\vec{a} \in W$:

Nechť $\vec{b} \in W$. Podle předchozího bodu existuje $\vec{p} \in P$ takový, že $\vec{b} = \vec{a} + \vec{p}$. Odtud máme $\vec{b} + P = \vec{a} + \vec{p} + P = \vec{a} + P = W$.

- Jednoznačnost podprostoru:

Předpokládejme, že podprostor $Q \subset \subset V$ splňuje $W = \vec{a} + Q$. Zároveň víme, že $W = \vec{a} + P$. Odtud je zřejmé, že $Q = P$. $\square$

Důsledek 6.16. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V . Pak W je podprostor V , právě když $\vec{0} \in W$.

Definice 6.17. Podprostor z předchozí věty nazveme **zaměřením** variety W a značíme $\mathcal{Z}(W)$. Vektor $\vec{a}$ ve vyjádření $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) = W$ nazýváme **vektorem posunutí**. Nenulové vektory ze $\mathcal{Z}(W)$ nazýváme **směrovými vektory** variety W . **Dimenzí variety** $\dim W$ nazveme $\dim \mathcal{Z}(W)$. Analogicky **kodimenzí variety** $\operatorname{codim} W$ nazveme $\operatorname{codim} \mathcal{Z}(W)$. Na základě dimenze zobecníme ve V pojmy bod, přímka, rovina, o kterých máme zatím názornou představu pouze v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$:

- Je-li $\dim W = 0$, pak W nazýváme **bodem**.
- Je-li $\dim W = 1$, pak W nazýváme **přímkou**.
- Je-li $\dim W = 2$, pak W nazýváme **rovinou**.
- Je-li $\operatorname{codim} W = 1$, pak W nazýváme **nadrovinou**.

Poznámka 6.18. V příkladu 6.4 jsme vyjmenovali všechny možné posunuté podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Podle věty 6.15 jde o úplný výčet lineárních variet v těchto prostorech.

Definice 6.19. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V . Necht $\vec{a} \in W$ a necht $\dim W = \ell \in \mathbb{N}$. Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ bázi $\mathcal{Z}(W)$, potom zřejmě

$$W = \left\{ \vec{x} \in V \left| (\exists t_1, t_2, \dots, t_\ell \in T) \left(\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i \right) \right. \right\}.$$

Rovnici $\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i$ nazýváme **směrovou rovnicí** variety W . Je-li $\dim V$ konečná a rozepíšeme-li směrovou rovnici po souřadnicích ve zvolené bázi V , dostaneme **parametrické rovnice** variety W ve zvolené bázi.

Příklad 6.20. Necht W je přímka v $\mathbb{R}^2$ se zaměřením $\mathcal{Z}(W) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a vektorem posunutí $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ilustrujme pojmy z předchozí definice.

- Směrová rovnice W :

$$W \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Parametrické rovnice W ve standardní bázi:

$$W \equiv \begin{array}{lcl} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 \end{array},$$

$$\text{kde } (\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ačkoliv jsme zvyklí značit souřadnice vektoru $\vec{x}$ ve standardní bázi $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$, budeme při parametrickém zápisu lineárních variet ve standardní bázi dodržovat ustálené značení souřadnic pomocí $x, y, z, u, \dots$

6.4 Vzájemná poloha variet a operace s nimi

Definice 6.21. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Nazveme je:

- (a) **rovnoběžnými**, pokud $\mathcal{Z}(W_1) \subset \mathcal{Z}(W_2)$ nebo $\mathcal{Z}(W_2) \subset \mathcal{Z}(W_1)$,
- (b) **mimoběžnými**, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,
- (c) **různoběžnými**, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 6.22 (Průnik variet). *Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Potom průnik $W_1 \cap W_2$ je buď $\emptyset$, nebo lineární varieta.*

Důkaz. Prázdný průnik jistě variety mít mohou. Například rovnoběžné a různé přímky v prostoru $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ukážeme, že pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ a pro libovolné $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. Jelikož $\vec{x}, \vec{y} \in W_1$, je také $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1$. Podobně $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$, proto také $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_2$. Odtud plyne, že $\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. $\square$

Úkol 6.23. Dokažte tvrzení věty 6.22 zobecněné pro průnik libovolného počtu variet.

Úkol 6.24. * Rozmyslete si, jaké všechny možné situace nastávají v $\mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^4$ pro průnik a vzájemnou polohu:

- dvou přímek,
- přímky a roviny,
- dvou rovin.

Jaké situace se objevují v prostoru $\mathbb{R}^4$, zatímco v $\mathbb{R}^3$ nenastávají?

Definice 6.25. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Necht $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Pak přímku W nazveme **příčkou** variet W_1 a W_2 , pokud $W \cap W_1 \neq \emptyset$ a $W \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 6.26 (LK variet). Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V . Necht $\alpha, \beta \in T$. Definujme-li $\alpha W_1 + \beta W_2 := \{\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \mid \vec{x} \in W_1, \vec{y} \in W_2\}$, pak $\alpha W_1 + \beta W_2$ je také lineární varieta ve V a platí, že $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2)$.

Důkaz. Necht $\vec{a} \in W_1$ a $\vec{b} \in W_2$. Potom máme:

$$\begin{aligned} \alpha W_1 + \beta W_2 &= \{\alpha \vec{a} + \alpha \vec{x} + \beta \vec{b} + \beta \vec{y} \mid \vec{x} \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{y} \in \mathcal{Z}(W_2)\} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \{\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \mid \vec{x} \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{y} \in \mathcal{Z}(W_2)\} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2). \end{aligned}$$

Není těžké si rozmyslet, že $\alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2)$ je podprostor V . Odtud s využitím věty 6.12 plyne, že jde o varietu se zaměřením $\alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2)$. $\square$

Poznámka 6.27. Rozmysleme si, že pro zaměření variety $\alpha W_1 + \beta W_2$ platí:

- (a) Pokud $\alpha = \beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \{\vec{0}\}$.
- (b) Pokud $\alpha = 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_2)$.
- (c) Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1)$.
- (d) Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)$.

Věta 6.28 (Obraz variety). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht W je lineární varieta v P . Potom $A(W)$ je lineární varieta v Q a platí, že $\mathcal{Z}(A(W)) = A(\mathcal{Z}(W))$.

Důkaz. Necht $\vec{a} \in W$. Pak $A(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) = A\vec{a} + A(\mathcal{Z}(W))$. Jelikož lineární obraz podprostoru je podprostor, vidíme, že jde o varietu se zaměřením $A(\mathcal{Z}(W))$. $\square$

Věta 6.29 (Vzor variety). Necht P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht W je lineární varieta v Q . Potom $A^{-1}(W)$ je buď $\emptyset$, nebo lineární varieta v P . Je-li $A^{-1}(W) \neq \emptyset$, pak platí, že $\mathcal{Z}(A^{-1}(W)) = A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

Důkaz. $A^{-1}(W)$ může být prázdná množina. Například pro $A = \Theta$ a varietu W , která není podprostorem. Předpokládejme nyní, že $A^{-1}(W) \neq \emptyset$. Pro $\vec{a} \in A^{-1}(W)$ platí, že $A\vec{a} \in W$. Proto $W = A\vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. Ukažme, že $A^{-1}(W) = \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$. Jelikož lineární vzor podprostoru je podprostor, bude jasné, že $A^{-1}(W)$ je lineární varieta se zaměřením $A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in A^{-1}(W) &\Leftrightarrow A\vec{x} \in W \Leftrightarrow A\vec{x} \in A\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{a}) \in \mathcal{Z}(W) \\ &\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} \in A^{-1}(\mathcal{Z}(W)) \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W)). \quad \square \end{aligned}$$

Příklad 6.30. POZOR! $A^{-1}(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) \neq A^{-1}(\vec{a}) + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

Nechť $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (nulový operátor) a $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$ (osa prvního a třetího kvadrantu). Poté $\Theta^{-1}(W) = \mathbb{R}^2$, ale

$$\Theta^{-1}(W) \neq \Theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \Theta^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}\right),$$

protože $\Theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset$. (A součet dvou množin, z nichž jedna je prázdná, nemá smysl.)

6.5 Variety jako afinní obaly

Vysvětleme vztah mezi lineárním a afinním obalem.

Věta 6.31 (Lineární obal a afinní obal). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Potom platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_{\alpha} = \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_{\lambda}.$$

Důkaz.

- $[\]_{\alpha} \subset \vec{x}_1 + [\]_{\lambda}$: Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_{\alpha}$, tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$. Pak máme:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1) \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_{\lambda}.$$

- $\vec{x}_1 + [\]_{\lambda} \subset [\]_{\alpha}$: Nechť $\vec{x} \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_{\lambda}$, tj. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1)$. Potom platí:

$$\vec{x} = \left(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i\right) \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i,$$

přičemž výraz vpravo je afinní kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$, protože součet koeficientů u jednotlivých vektorů v lineární kombinaci je $\left(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i\right) + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i = 1$. Tudíž $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_{\alpha}$. $\square$

Poznámka 6.32. V afinním obalu nezáleží na pořadí vektorů, proto samozřejmě platí pro libovolný index $i_0 \in \hat{\ell}$:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_{i_0} + [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda.$$

Důsledek 6.33. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in V$ a necht $i_0 \in \hat{\ell}$. Pak platí:

- $\mathcal{Z}([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha) = [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_2 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda$.
- $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \leq \ell - 1$.

Definice 6.34. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell$ nazveme:

- **afinně nezávislé** (AN), pokud $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \ell - 1$,
- **afinně závislé** (AZ), pokud $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha < \ell - 1$.

Důsledek 6.35.

- Jeden vektor je vždy AN.
- Pro $\ell \geq 2$ a $i_0 \in \hat{\ell}$ platí:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \text{ jsou AN} \Leftrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0} \text{ jsou LN.}$$

Věta 6.36 (Afinní závislost pro více vektorů). Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V , kde $\ell \geq 2$. Poté vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou AZ, právě když existuje $i_0 \in \hat{\ell}$ tak, že

$$\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha.$$

Slovy: „Mezi alespoň dvěma AZ vektory existuje vektor, který je AK ostatních.“

Důkaz.

- $(\Rightarrow)$: Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou AZ, proto $\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1$ jsou LZ. Existují tudíž čísla $\alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ taková, že $\sum_{i=2}^\ell \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1) = \vec{0}$ a zároveň existuje $i_0 \in \{2, \dots, \ell\}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$. Odtud dostáváme:

$$-\alpha_{i_0}(\vec{x}_{i_0} - \vec{x}_1) = \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_1).$$

Proto platí:

$$\vec{x}_{i_0} = - \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} \vec{x}_i + \left(1 + \sum_{i=2, i \neq i_0}^\ell \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} \right) \vec{x}_1.$$

Jelikož

$$-\sum_{i=2, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} + \left(1 + \sum_{i=2, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}}\right) = 1,$$

máme dokázáno, že $\vec{x}_{i_0}$ je AK vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_{\ell}$.

- ($\Leftarrow$): $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_{\ell}]_{\alpha}$, tedy existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_{\ell}$ taková, že $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \alpha_i = 1$. Odtud dostáváme:

$$\vec{0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_{i_0}).$$

Jelikož jde o netriviální LK vektorů $\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_{\ell} - \vec{x}_{i_0}$, jsou tyto LZ. To znamená, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell}$ jsou AZ. $\square$

Poznámka 6.37. Nabádáme čtenáře, aby si rozmyslel, že AN vektory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ vypadají následovně:

- Jeden vektor je vždy AN.
- Dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou AN $\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{y}$.
- Tři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou AN $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$ neleží v jedné přímce.
- Čtyři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ jsou v $\mathbb{R}^2$ vždy AZ.
Čtyři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ jsou v $\mathbb{R}^3$ AN $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ neleží v jedné rovině.

Nyní už si můžeme posvítit na otázku, zda je každá lineární varieta afinním obalem.

Věta 6.38 (Varieta konečné dimenze je afinní obal). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V splňující $\dim W = \ell - 1$, $\ell \in \mathbb{N}$. Pak existují vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{\ell}$ takové, že*

$$W = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{\ell}]_{\alpha}.$$

Důkaz. Z věty 6.15 plyne, že existuje podprostor $\mathcal{Z}(W)$ dimenze $\ell - 1$ takový, že $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$, kde $\vec{a} \in W$. Buď je $\mathcal{Z}(W) = \{\vec{0}\}$, potom $W = [\vec{a}]_{\alpha}$, nebo existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1})$ podprostoru $\mathcal{Z}(W)$. Poté je podle věty 6.31 splněno:

$$W = \vec{a} + [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1}]_{\lambda} = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{x}_1, \vec{a} + \vec{x}_2, \dots, \vec{a} + \vec{x}_{\ell-1}]_{\alpha},$$

W je tudíž afinním obalem ℓ vektorů. $\square$

Věta 6.39 (Varieta nekonečné dimenze není afinní obal). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V s $\dim W = +\infty$. Pak W není rovna žádnému afinnímu obalu.*

Důkaz. Podle důsledku 6.33 je každý afinní obal varietou konečné dimenze. Odtud tvrzení plyne. $\square$

6.6 Variety jako průniky nadrovin

Věta 6.40 (Nadrovina). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\varphi \in V^\#$, $\varphi \neq \Theta$. Nechť $\alpha \in T$. Potom množina*

$$\{\vec{x} \in V \mid \varphi(\vec{x}) = \alpha\}$$

je nadrovina ve V .

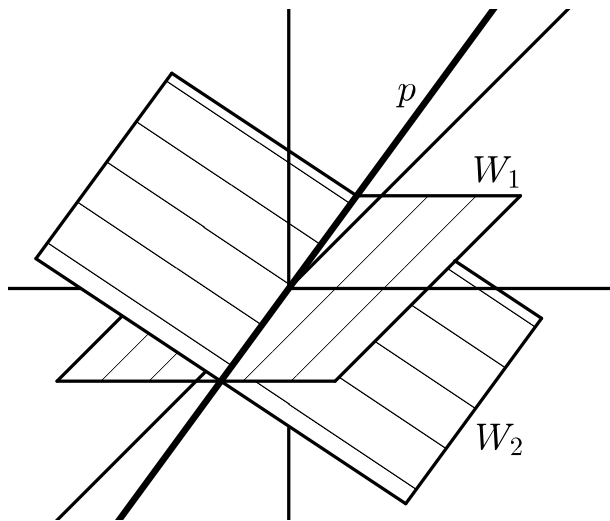
Důkaz. Protože $\varphi \neq \Theta$, platí, že $\varphi(V) = T$. Existuje tudíž $\vec{a} \in V$ tak, že $\varphi(\vec{a}) = \alpha$. Potom platí, že $\varphi^{-1}(\alpha) = \vec{a} + \ker \varphi$, což je zjevně varieta kodimenze jedna, neboť podle věty 4.52 je $\text{codim } \ker \varphi = h(\varphi) = 1$. $\square$

Následující věta osvětlí, jaký je vztah mezi nadrovinami a varietami konečné kodimenze. Viz také obrázek 13.

Věta 6.41 (Varieta jako průnik nadrovin). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť W je lineární varieta ve V , $\text{codim } W = \ell \in \mathbb{N}$. Potom existují LN lineární funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\ell$ a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \in T$ tak, že*

$$W = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Slovy: „Každá lineární varieta o kodimenzi ℓ je průnikem ℓ nadrovin.“



Obrázek 13: Přímka p v $\mathbb{R}^3$ – varieta kodimenze dva – jako průnik dvou (nad)rovin W_1 a W_2 .

Důkaz. Podle věty 6.15 lze varietu psát jako $W = \vec{a} + P$, kde $P \subset\subset V$ a $\vec{a}$ je libovolný bod z W . Podle předpokladu existuje $Q \subset\subset V$, doplněk P do V , splňující $\dim Q = \ell$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$ bázi Q . Definujme pro každé $i \in \hat{\ell}$:

$$\varphi_i = x_i^\# A_Q \quad \text{a} \quad \alpha_i = \varphi_i(\vec{a}),$$

přičemž A_Q je projektor na Q podle P . Pak se LN vektorů $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\ell$ ukáže analogicky jako ve větě 4.58 a zbývá ukázat, že platí:

$$\vec{a} + P = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Je třeba ověřit dvě inkluze:

- $\vec{a} + P \subset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Necht $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}$, kde $\vec{p} \in P$. Protože $A_Q(P) = \{\vec{0}\}$, platí pro každé $i \in \widehat{\ell}$, že $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a}) + \varphi_i(\vec{p}) = \alpha_i + 0 = \alpha_i$. Tedy $\vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$.
- $\vec{a} + P \supset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Necht pro každé $i \in \widehat{\ell}$ platí, že $\varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i$, pak $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a})$, tudíž $\varphi_i(\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Označme $\vec{z} = \vec{x} - \vec{a}$. Jelikož $\vec{z} \in V$, existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$. Označme $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$ souřadnice $\vec{q}$ v bázi $\mathcal{X}$. Dostáváme $\varphi_i(\vec{z}) = \varphi_i(\vec{p}) + \varphi_i(\vec{q}) = 0 + \beta_i$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$. Proto $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\ell = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$ a $\vec{z} = \vec{p} \in P$, neboli $\vec{x} \in \vec{a} + P$. $\square$

Definice 6.42. Rovnice

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{x}) &= \alpha_1 \\ \varphi_2(\vec{x}) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ \varphi_\ell(\vec{x}) &= \alpha_\ell \end{aligned}$$

z věty 6.41 nazýváme **vektorovými rovnicemi** variety W . Navíc, je-li $\dim V = n \in \mathbb{N}$ a je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze V , potom pro libovolný vektor $\vec{x} \in W$ splňují souřadnice

$$(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ **neparametrické rovnice** variety } W \text{ v bázi } \mathcal{X}:$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \varphi_1(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_1(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_1(\vec{x}_n) &= \alpha_1 \\ \beta_1 \varphi_2(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_2(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_2(\vec{x}_n) &= \alpha_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \ddots &\quad \quad \quad \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \beta_1 \varphi_\ell(\vec{x}_1) + \beta_2 \varphi_\ell(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n \varphi_\ell(\vec{x}_n) &= \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Nadroviny, jejichž průnik tvoří danou varietu, nejsou určeny jednoznačně. Viz následující příklad.

Příklad 6.43. Zapište přímku W s vektorem posunutí $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a zaměřením $\mathcal{Z}(W) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$

dvěma různými způsoby jako průnik nadrovin.

Řešení: Užijeme konstrukci z důkazu věty 6.41.

1. Volme $Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ s bází $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Položme $\varphi_1 = e_2^\# A_Q$ a $\varphi_2 = e_3^\# A_Q$. Poté platí:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z = \varphi_2(\vec{a}) = \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Neparametrické rovnice W ve standardní bázi mají proto tvar:

$$y = 1 \quad \text{a} \quad z = 1.$$

2. Necháme doplněk Q stejný, volíme pouze jinou jeho bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Položme $\varphi_1 = x_1^\# A_Q$ a $\varphi_2 = x_2^\# A_Q$, pak platí:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{y+z}{2} = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{y-z}{2} = \varphi_2(\vec{a}) = \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Neparametrické rovnice W ve standardní bázi jsou tentokrát:

$$\frac{y+z}{2} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{y-z}{2} = 0.$$

7 Konvexní množiny ★

Motivace. Lineární programování (LP) řeší problém nalezení minima (resp. maxima) lineárního funkcionálu na jisté konvexní množině. Z bohaté škály úloh z této oblasti jmenujme alespoň dopravní problém, problém maximalizace zisku a problém minimalizace výrobních nákladů.

Zformulujme **kanonickou úlohu LP**:

Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, kde $h(\mathbb{A}) = m < n$. Dále necht $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Najděte

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

při splnění tzv. podmínek přípustnosti, tj. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vyhovuje podmínkám:

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ a } x_i \geq 0 \text{ pro každé } i \in \hat{n}.$$

Existuje-li optimální řešení – tedy řešení, kdy se nabývá minima – pak leží ve vrcholech konvexního mnohostěnu (tj. konvexně nezávislých generátorech konvexního obalu) určeného podmínkami přípustnosti. Metody řešení úloh LP si osvojíte ve druhém ročníku v předmětu Lineární programování. (Za všechny jmenujme alespoň známou simplexovou metodu. Její název je odvozen geometrického objektu, kterému říkáme simplex a který si na konci kapitoly pro zajímavost také definujeme. Ovšem přímo se simplexová metoda pracuje jen ve speciálních případech.)

V celé této kapitole bude V značit vektorový prostor nad tělesem $T \subset \mathbb{R}$. K definici konvexní množiny totiž potřebujeme pojem úsečka a ten má dobrý smysl právě pro taková tělesa.

Definice 7.1. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Necht $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Úsečkou** mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu:

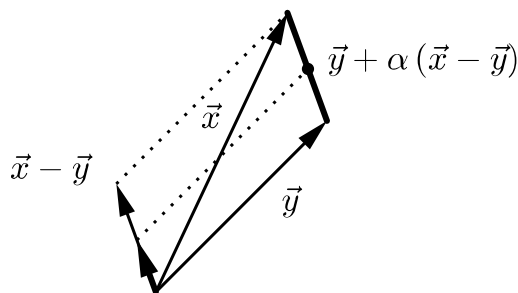
$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Poznámka 7.2. Uvedme ekvivalentní zápisy úsečky:

$$\begin{aligned} \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\} &= \{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \cap T\} \\ &= \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \cap T\}. \end{aligned}$$

Z posledního zápisu je vidět, že úsečku mezi body $\vec{x}, \vec{y}$ získáme přičítáním α -násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$ pro $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.³⁹ Tudíž v $\mathbb{R}^2$ odpovídá úsečka tomu, co si pod tímto pojmem každý představí. Viz obrázek 14.

³⁹Zmínme, že v současné literatuře je častější symbol $[0, 1]$ pro uzavřený interval.

Obrázek 14: Úsečka mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Je možné uvažovat pouze prostory nad $T \subset \mathbb{R}$, protože po číslech z T chceme, aby šla porovnat s nulou ($\alpha \geq 0$), což pro komplexní nereálná čísla nelze.

Definice 7.3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $K \subset V$. Množinu K nazveme **konvexní**, pokud platí:

- $K \neq \emptyset$,
- K obsahuje s každými dvěma body i úsečku mezi nimi.

Poznámka 7.4. Každá lineární varieta je konvexní množinou, protože s každými dvěma body obsahuje úsečku mezi nimi. Úsečka je totiž podmnožinou spojnice.

Příklad 7.5. Konvexními množinami v $\mathbb{R}^2$ jsou kromě variet (bodů, přímk, celého $\mathbb{R}^2$) také kruhy, čtverce, obdélníky atd. Konvexními množinami v $\mathbb{R}^3$ jsou opět kromě variet (bodů, přímk, rovin a celého $\mathbb{R}^3$) také koule, krychle, kvádry atd.

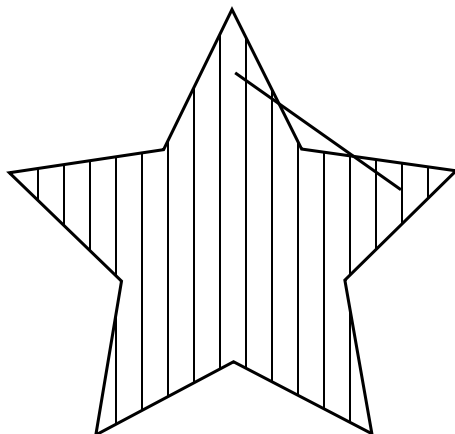
S pojmem úsečka úzce souvisí pojem konvexní obal.

Definice 7.6. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Potom **konvexní kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \geq 0$ pro každé $k \in \hat{\ell}$. Množinu všech konvexních kombinací nazýváme **konvexním obalem** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Platí tedy:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa := \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \left| \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1, \alpha_k \in T \text{ a } \alpha_k \geq 0 \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right. \right\}.$$

Poznámka 7.7. Přímo z definice plyne, že konvexní obal dvou vektorů je roven úsečce mezi nimi.

Souvislost konvexních obalů a konvexních množin je shrnuta v následujících třech větách.



Obrázek 15: Hvězda není konvexní množinou v $\mathbb{R}^2$. Je vyznačena úsečka mezi body hvězdy, která není ve hvězdě obsažena.

Věta 7.8 (Konvexní obal je konvexní množina). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Pak $K = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina a K obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Analogie důkazu věty 6.7. □

Věta 7.9 (Konvexní množina obsahuje konvexní kombinace). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a K je konvexní množina ve V . Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z K . Pak platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa \subset K.$$

Slovy: „Konvexní množina obsahuje s libovolnými svými body i všechny jejich konvexní kombinace.“

Důkaz. Analogie důkazu věty 6.8. □

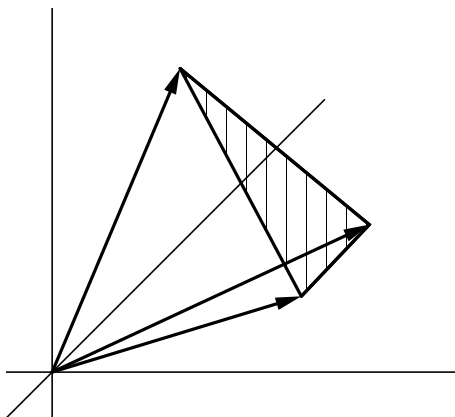
Věta 7.10 (Minimalita konvexního obalu). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V . Potom $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je nejmenší konvexní množina (ve smyslu inkluze) obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Z věty 7.9 víme, že každá konvexní množina obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Jelikož zároveň z věty 7.8 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina, máme dokázáno, že je to nejmenší konvexní množina obsahující dané body. □

Poznámka 7.11. Podle věty 7.10 je řešením úlohy najít minimální konvexní množinu K , která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, konvexní obal $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.

Příklad 7.12. Rozmyslete si, jak vypadají konvexní obaly jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Například $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$, kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou AN vektory, tvoří trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$.

Řešení: Jelikož jde o konvexní množinu, musí K obsahovat úsečky mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, $\vec{x}$ a $\vec{z}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$. Dále musí K také obsahovat úsečky mezi body ze tří výše uvedených úseček. Tudíž K obsahuje trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 16. Jelikož trojúhelník už je konvexní množina, našli jsme nejmenší konvexní množinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.



Obrázek 16: Konvexní obal tří AN vektorů v $\mathbb{R}^3$ je trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi konvexními množinami a konvexními obaly napadnout, zní: „Je každá konvexní množina konvexním obalem nějakých vektorů?“ Odpověď – na rozdíl od lineárních variet – zní: NE (nezávisle na dimenzi V). Například v $\mathbb{R}^2$, jak si snadno rozmyslíte, jsou konvexní obaly mnohoúhelníky. Proto kruh jako konvexní obal konečně mnoha vektorů nezískáme.

Definice 7.13. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou AN vektory z V , $k \in \mathbb{N}_0$. Pak $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\kappa$ nazýváme **k -simplexem s vrcholy $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$** . Speciálně nazýváme:

- (a) $[\vec{x}_0]_\kappa$ **bodem**,
- (b) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1]_\kappa$ **úsečkou**,
- (c) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2]_\kappa$ **trojúhelníkem**,
- (d) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\kappa$ **čtyřstěnem**.

Poznámka 7.14. Uvědomme si, že k -simplexy v $\mathbb{R}^3$ odpovídají naší geometrické představě bodu, úsečky, trojúhelníku a čtyřstěnu.

Definice 7.15. Necht V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V , $\ell \geq 2$. Řekneme, že jsou **konvexně závislé** (KZ), pokud existuje index $i_0 \in \hat{\ell}$ tak, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. V opačném případě je nazveme **konvexně nezávislémi** (KN). Jediný vektor je vždy KN.

Příklad 7.16. Zatímco v $\mathbb{R}^2$ jsou nanejvýš tři vektory AN, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze najít n KN vektorů. Například vrcholy libovolného pravidelného mnohoúhelníku jsou KN.

8 Dodatek 1: Polynomy

Definice 8.1. Komplexní funkci komplexní proměnné $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme **polynomem**, pokud existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a existují čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (nazýváme je **koeficienty** polynomu) taková, že

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Názvosloví:

- **Nulový polynom** $\mathcal{O}$ definujeme $\mathcal{O}(t) := 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
- **Stupeň** polynomu st $p := \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$. (Vyjadřuje, jakou maximální mocninu t polynom obsahuje.)⁴⁰
- Podle stupně n například rozlišujeme:
 - lineární polynom ($n = 1$), například $p(t) = t + 3$,
 - kvadratický polynom ($n = 2$), například $p(t) = -t^2 + \frac{1}{2}t + \sqrt{3}$,
 - kubický polynom ($n = 3$), například $p(t) = -it^3$.
- **Kořen (nulový bod)** polynomu p je každé číslo $t_0 \in \mathbb{C}$ splňující $p(t_0) = 0$.
- **Reálným polynomem** nazveme polynom s reálnými koeficienty.

Následující tvrzení bude základní ingrediencí několika důkazů.

Lemma 8.2. *Je-li p nulový polynom, potom všechny jeho koeficienty jsou nulové.*

Důkaz. Čtenář z matematické analýzy ví, že polynom je spojitá funkce. Odvoláme se tedy na tuto znalost. Nechť p má tvar (5). Pak jistě $\alpha_0 = 0$ (stačí dosadit $t = 0$). Dostáváme potom:

$$p(t) = t(\alpha_1 + \dots + \alpha_n t^{n-1}) = tq(t).$$

Polynom q je tudíž nulový pro každé $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ze spojitosti funkce q je také $q(0) = 0$. Dosazením $t = 0$ odvodíme, že $\alpha_1 = 0$. Opakováním postupu zjistíme, že také všechny další koeficienty jsou nulové. $\square$

Poznámka 8.3. Podle definice stupeň nulového polynomu neexistuje. (Jako jediný z polynomů nemá stupeň definován.) POZOR! Polynom nultého stupně je nenulová konstanta.

Věta 8.4 (Jednoznačnost koeficientů polynomu). *Koeficienty polynomu jsou určeny jednoznačně.*

⁴⁰Též se používá symbol $\deg p$ z anglického slova degree, což znamená stupeň.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje polynom p , pro který platí:

$$p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j = \sum_{j=0}^n \beta_j t^j \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C} \text{ (přitom } \alpha_n \text{ a } \beta_n \text{ mohou být nulová čísla)}$$

a existuje index $j_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$ takový, že $\alpha_{j_0} \neq \beta_{j_0}$. Pak ale platí:

$$\sum_{j=0}^n (\alpha_j - \beta_j) t^j = 0 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C},$$

a tudíž jde o nulový polynom. Protože zároveň $\alpha_{j_0} - \beta_{j_0} \neq 0$, dostáváme spor s tvrzením lemmatu 8.2. $\square$

Poznámka 8.5. Až nyní jsme se dozvěděli, že definice stupně polynomu je korektní, tj. že každý polynom má stupeň jednoznačně určený.

Poznámka 8.6. V příkladech často využijeme, že z věty 8.4 plyne: Dva polynomy se rovnají, právě když se rovnají jejich koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné.

Cílem zbytku kapitoly bude dojít k důkazu tvrzení o rozkladu polynomu na kořenové činitele. Následující věta bude jednou z mála, které ponecháme bez důkazu. Důkazů sice existuje celá řada, ale všechny vyžadují znalosti nad rámec prvního ročníku. ⁴¹

Věta 8.7 (Základní věta algebry). *Každý polynom alespoň prvního stupně má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.*

Věta 8.8 (Bézoutova ⁴² věta). *Nechť p je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ a $t_0 \in \mathbb{C}$. Potom existuje polynom q stupně $n - 1$ takový, že platí:*

$$p(t) = p(t_0) + (t - t_0)q(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Nechť p je tvaru (5) a $\alpha_n \neq 0$. Potom

$$\begin{aligned} p(t) - p(t_0) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j - \sum_{j=0}^n \alpha_j t_0^j &= \sum_{j=0}^n \alpha_j (t^j - t_0^j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (t^j - t_0^j) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (t - t_0) \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} \\ &= (t - t_0) \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} &= (t - t_0) \sum_{i=0}^{n-1} t^i \sum_{j=i+1}^n \alpha_j t_0^{j-1-i}. \end{aligned}$$

Stačí označit $q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \sum_{j=i+1}^n \alpha_j t_0^{j-1-i}$. Je to polynom a má stupeň $n - 1$, protože pro $i = n - 1$ dostaneme maximální mocninu t^{n-1} , kterou $q(t)$ obsahuje, a koeficient u t^{n-1} je $\alpha_n \neq 0$.

V důkazu jsme využili vzorec $a^j - b^j = (a - b) \sum_{i=0}^{j-1} a^i b^{j-1-i}$, který platí pro každé $a, b \in \mathbb{C}$ a $j \in \mathbb{N}$. (Čtenář jej dokáže sám matematickou indukcí.) $\square$

⁴¹Ačkoliv bylo tvrzení základní věty algebry známo již od 17. století (nejprve ovšem pro reálné polynomy), první korektní důkaz publikoval až v roce 1806 francouzský matematik Jean-Robert Argand [výslovnost „žán robér argán“] (1768–1822). Známý je důkaz z Gaussovy dizertační práce z roku 1799, který ovšem obsahoval díru v podobě nedokázaného topologického tvrzení. Tuto díru zalepil až roku 1920 ruský matematik Alexander Ostrowski (1893–1986).

⁴²Etienne Bézout (1730–1783), francouzský matematik

Důsledek 8.9. Každý polynom stupně n , kde $n \in \mathbb{N}_0$, má nejvýše n různých kořenů.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle stupně polynomu n .

- Pro $n = 0$ je platnost tvrzení evidentní.
- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 0$, že každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů. Necht p je polynom stupně $n + 1$ a necht t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že

$$p(t) = (t - t_0)q(t).$$

Jelikož má q podle indukčního předpokladu nejvýše n kořenů, má p nejvýše $n + 1$ kořenů. $\square$

Důsledek 8.10. Jedině nulový polynom má nekonečně mnoho kořenů.

Poznámka 8.11. Pokud tedy u nějakého polynomu tvaru $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$ zjistíme, že má více než n kořenů, pak už jde nutně o nulový polynom. Tudíž $\alpha_j = 0$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. (Toto pozorování hraje samozřejmě roli jen v případech, kdy jsou koeficienty zadány jako složitější výrazy a jejich nulovost není hned zřejmá.)

Věta 8.12 (Rozklad polynomu na kořenové činitele). Necht p je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ tvaru (5), tj. $\alpha_n \neq 0$. Necht $t_1, t_2, \dots, t_k$ jsou všechny jeho navzájem různé kořeny. Potom existují jednoznačně určená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{j=1}^k n_j = n$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$p(t) = \alpha_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

Říkáme, že n_j je **násobnost** kořene t_j a $t - t_j$ je **kořenový činitel** příslušející t_j .

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle stupně polynomu n .

- Pro $n = 1$ je pro $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ jednoznačným rozkladem na kořenové činitele $p(t) = \alpha_1 (t + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})$.
- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 1$, že každý polynom stupně n má jednoznačný rozklad na kořenové činitele. Necht p je polynom stupně $n + 1$ a necht t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že

$$p(t) = (t - t_0)q(t).$$

Podle indukčního předpokladu má q jednoznačný rozklad na kořenové činitele, tj. existují jednoznačně určená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{j=1}^k n_j = n$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$q(t) = \alpha_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

Odtud máme rozklad p na kořenové činitele:

$$p(t) = \alpha_n(t - t_0)(t - t_1)^{n_1}(t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

Ten lze ještě upravit. Pokud $t_0 = t_j$ pro nějaké $j \in \hat{k}$, pak dostaneme:

$$p(t) = \alpha_n(t - t_1)^{n_1}(t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_j)^{n_j+1} \dots (t - t_k)^{n_k}.$$

V opačném případě máme:

$$p(t) = \alpha_n(t - t_1)^{n_1}(t - t_2)^{n_2} \dots (t - t_k)^{n_k}(t - t_{k+1})^{n_{k+1}},$$

kde $t_{k+1} = t_0$ a $n_{k+1} = 1$. Je zřejmé, že součet násobností je $n + 1$.

Ponecháme čtenáři k rozmyšlení, že námi nalezený rozklad p na kořenové činitele je jediný (až na pořadí činitelů). $\square$

Poznámka 8.13. Není těžké si rozmyslet, že násobnost kořene polynomu lze ekvivalentně definovat následujícím způsobem: t_0 je kořen polynomu p násobnosti k , pokud existuje polynom q takový, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ a $q(t_0) \neq 0$.

Věta 8.14 (O kořenech reálných polynomů). *Nechť p je reálný polynom a t_0 je jeho kořen násobnosti k . Potom $\overline{t_0}$ je také jeho kořen násobnosti k .*

Důkaz. Z Bézoutovy věty víme, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ a $q(t_0) \neq 0$. Pro každé $t \in \mathbb{C}$ díky reálnosti koeficientů p a díky vlastnostem komplexních čísel platí:

$$p(t) = \overline{p(\overline{t})} = \overline{(t - t_0)^k q(\overline{t})} = (t - \overline{t_0})^k \overline{q(\overline{t})}.$$

Označme $r(t) = \overline{q(\overline{t})}$. Pak r je jistě polynom a $r(\overline{t_0}) = \overline{q(t_0)} \neq 0$. Tím je dokázáno, že $\overline{t_0}$ je kořen p násobnosti k . $\square$

Důsledek 8.15. *Má-li reálný polynom lichý stupeň, pak má reálný kořen.*

Poznámka 8.16. Rozklad reálného polynomu na kořenové činitele v reálném oboru: Je-li $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kořen reálného polynomu p násobnosti k , potom $\overline{t_0}$ je také kořenem p násobnosti k a v rozkladu na kořenové činitele můžeme sloučit jim odpovídající činitele:

$$(t - t_0)^k (t - \overline{t_0})^k = ((t - t_0)(t - \overline{t_0}))^k = (t^2 - (t_0 + \overline{t_0})t + t_0 \overline{t_0})^k,$$

kde $t_0 + \overline{t_0} = 2\operatorname{Re}(t_0)$ a také $t_0 \overline{t_0} = |t_0|^2$ jsou reálná čísla.

Příklad 8.17. Reálný polynom $p(t) = t^4 - 1$ má v komplexním oboru rozklad:

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t - i)(t + i),$$

zatímco v reálném oboru má rozklad:

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1).$$

9 Dodatek 2: Historie vektorového prostoru

Lineární algebra se na vysokých školách učí „proti toku času“. Celou historií lineární algebry se táhly soustavy lineárních algebraických rovnic (k jejich kompletnímu řešení se ale dospělo až roku 1905), determinanty se objevily sto let před maticemi (v polovině 18. století našly determinanty svou oblibu díky Cramerovu pravidlu, ⁴³ zatímco matice byly poprvé pořádně zpracované až v díle Caleyho roku 1858). ⁴⁴ Vrcholem veškeré abstrakce je pak pojem vektorového prostoru, jehož náznak se objevuje v díle Grassmanna v roce 1844 a poté Peana roku 1888. Pojďme se na historii vektorového prostoru podívat blíže a seznámit se právě s Grassmannem a Peanem, kteří jsou považováni za otce lineární algebry. Informace čerpáme převážně z knih a článku [5, 2, 10].

Pojem vektoru pochází z fyziky, je to veličina mající směr a velikost (síla, rychlost). Matematika zavádí vektory v souvislosti s komplexními čísly – Gauss roku 1831 začíná pracovat s komplexními čísly jako s vektory v rovině. ⁴⁵ Ještě předtím Bolzano definuje operace s body, přímkami, rovinami. ⁴⁶ Roku 1832 Bellavitis představuje tzv. ekvipolentní počet s úsečkami. ⁴⁷ Termín vektor i skalár najdeme roku 1843 poprvé u Hamiltona v práci o kvaternionech, vektory ve vícedimenzionálních prostorech se objevují u Caleyho, Hamiltona a Grassmanna. ⁴⁸ Ve všech těchto pracích jde o konkrétní příklady vektorových prostorů, kde se s vektory počítá podobně jako s čísly (sčítají se, násobí číslem), ale neexistuje žádná obecná definice vektorového prostoru, která by všechny tyto příklady zahrnovala.

Podobně se také pojmy lineární (ne)závislost, dimenze a báze objevují v různých kontextech: v algebraické teorii čísel (Dedekind), ⁴⁹ v lineárních diferenciálních rovnicích (viz [4]), v řešení homogenních soustav lineárních algebraických rovnic (Euler si všímá jisté závislosti rovnic, i když pojem definuje jen vágně), ⁵⁰ v euklidovské geometrii (kartézské souřadnice zavádí Descartes ⁵¹ v 17. století, Euler zkoumá prostor $\mathbb{R}^3$, Monge ⁵² potom na počátku 19. století prostor $\mathbb{R}^n$), v prostoru matic (operace s maticemi popisuje Caley v roce 1858).

V 19. století se rodí axiomatický přístup k matematice a snaha o práci s objekty jako s čísly: konečné grupy a tělesa definuje Weber ⁵³ v roce 1893, kvaterniony zavádí Hamilton

⁴³Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik

⁴⁴Arthur Cayley (1821–1895), britský matematik a právník

⁴⁵Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik, fyzik a astronom

⁴⁶Bernard Bolzano (1781–1848), český, německy mluvící matematik, filozof a kněz

⁴⁷Giusto Bellavitis (1803–1880), italský matematik

⁴⁸William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom

⁴⁹Richard Dedekind (1831–1916), německý matematik

⁵⁰Leonhard Paul Euler (1707–1783), švýcarský matematik a fyzik

⁵¹René Descartes (1596–1650), francouzský matematik, fyzik a filozof

⁵²Gaspard Monge (1746–1818), francouzský matematik, přírodovědec a politik

⁵³Heinrich Martin Weber (1842–1913), německý matematik

v roce 1843, Caley a Graves ⁵⁴ studují oktoniony, Peirce ⁵⁵ definuje pojem algebra v roce 1870, Peano axiomaticky zavádí přirozená čísla roku 1889.

První, kdo přichází s ideou vektorového prostoru a studiem jeho vlastností, je Hermann Günter Grassmann, který za svého života dosáhl uznání na poli lingvistiky, nikoliv však matematiky. Jeho případ nám ukáže, jak je důležité naučit se dobře jazyk matematiky a umět jeho prostřednictvím jasně formulovat myšlenky.

Hermann Günter Grassmann (1809, Štětín, Prusko – 1877, Štětín, Německo)



Obrázek 17: Hermann Günter Grassmann

Hermannův otec Justus byl profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu a syn šel v jeho šlépějích. Zpočátku to však na kariéru profesora nevypadalo, neboť Hermann byl jen průměrným studentem. V posledním ročníku se ale vzchopil a odmaturoval na pozici druhého nejlepšího studenta gymnázia. V roce 1827 nastoupil na univerzitu v Berlíně, kde studoval teologii, literaturu, filozofii a klasické jazyky, ale žádnou matematiku ani fyziku! Stal se profesorem nižšího stupně gymnázia. V roce 1840 složil zkoušku, která mu umožnila vyučovat matematiku, fyziku, chemii a mineralogii na vyšším stupni gymnázia. Úroveň gymnázií v 19. století byla velmi vysoká a taková zkouška vyžadovala nejen výborné znalosti učiva, ale dokonce vypracování původní vědecké práce. Grassmannova práce nesla název *Theorie der Ebbe und Flut* (Teorie odlivu a přílivu) a šlo o aplikaci vektorových metod, které rozvíjel už od roku 1832.

Zároveň se Grassmann věnuje jazykům. V roce 1842 vydává učebnice mluvené němčiny a latiny.

Roku 1844 přichází pro dnešní lineární algebru zlomové dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teorie lineárních extenzí, nové odvětví matematiky).

⁵⁴John Thomas Graves (1806–1870), irský matematik a právník

⁵⁵Charles Sanders Peirce (1839–1914), americký matematik, logik a filozof

Objevuje se tu idea algebry, kde jsou definovány operace se symboly reprezentujícími geometrické objekty (body, úsečky, rovnoběžníky, rovnoběžnostěny). V *Ausdehnungslehre* Grassmann předběhl dobu, jak uvidíme, jeho myšlenky našly pochopení až ve 20. století. Ovšem jeho dílo nebylo přijato matematiky ještě z dalších dvou důvodů. Grassmann matematiku nikdy nestudoval, a tak celé dílo bylo sepsáno filozoficky, obzvláště úvod byl pro matematiky nečitelný. A jako matematik-amatér byl přehlížen matematiky-profesionály. Grassmann se ovšem nevzdal a studiu vektorových prostorů se i nadále věnoval. Zejména se snažil ukázat možné aplikace, například v roce 1845 v díle *Theorie der Elektrodynamik*.

Roku 1846 získává za dílo *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik* (Geometrická analýza spojená s geometrickou charakteristikou, objevenou Leibnizem) cenu od Císařské Jablonovské společnosti (předchůdkyně akademie věd v Lipsku). Grassmann doufá, že cena mu pomůže získat post na univerzitě, touží se totiž věnovat naplno vědě. Jeho žádost je ovšem zamítnuta na základě Kummerových slov: „doporučeníhodný materiál, ale vyjádřený v těžko srozumitelné formě“. ⁵⁶ Grassmann tedy opět naráží na problém filozofického nejasného vyjadřování myšlenek.

Uvedme i pár detailů z jeho osobního života. Roku 1849 si bere Therese Knappe, s níž má jedenáct dětí, ovšem jen sedm z nich dosáhne dospělého věku. Jeden ze synů se stal matematikem, název jeho dizertace zněl *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Krümmen Flächen* (Použití *Ausdehnungslehre* ve všeobecné teorii prostorových křivek a zakřivených ploch), jablko tak skutečně nepadlo daleko od stromu.

Nedostatek uznání v matematice přiměl Grassmanna, aby se obrátil ke své druhé zálibě – lingvistice. Studium sanskrtu a góštiny mu přineslo úspěch, porovnáním fonetiky zpochybnil pozici sanskrtu jakožto nejstaršího indoevropského jazyka.

Ausdehnungslehre byla ale jeho nejcenějším dílem a rozhodl se, že ji ještě jednou přepíše, aby matematický svět konečně docenil její význam. V roce 1862 publikuje *Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet* (Teorie extenzí: přepracovaná důkladně a v přísné formě), ale dílo má ještě menší úspěch než *Ausdehnungslehre* z roku 1844. Lze tudíž říci, že během života se Grassmann dočkal většího uznání v oblasti lingvistiky než v matematice.

Podívejme se nyní blíže na *Ausdehnungslehre*. Název teorie extenzí pochází z faktu, že Grassmann definuje i součin a například součinem bodů je úsečka, součinem úseček rovnoběžníků, součinem rovnoběžníků rovnoběžnostěn, tedy vždy objekt v prostoru vyšší dimenze. Nás ale zajímá souvislost *Ausdehnungslehre* s lineární algebrou. Grassmann začíná se souborem „jednotek“ $e_1, e_2, e_3, \dots$ (což jsou v dnešním smyslu lineárně nezávislé vektory) a uvažuje jejich formální lineární kombinace $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \dots$, kde $a_i \in \mathbb{R}$. Takové kombinace tvoří množinu, kterou Grassmann dále zkoumá. Definuje nulovost a rovnost

⁵⁶Ernst Eduard Kummer (1810–1893), německý matematik

lineárních kombinací, jejich součet a násobení skalárem. Zavádí axiomy lineárního prostoru pro tyto operace. Představuje pojmy lineární nezávislost, lineární obal, dimenze, báze, lineární podprostor a jeho doplněk. Dokazuje nezávislost dimenze na volbě báze, Steinitzovu větu o výměně (Steinitz ⁵⁷ ji poté znovu dokáže roku 1913, jelikož Grassmannovy výsledky nejsou známé), 1. větu o dimenzi. Dokazuje, že lineárně nezávislé vektory lze doplnit na bázi a z generátorů lze vybrat bázi. Odvozuje vzorec pro změnu souřadnic při přechodu k jiné bázi. Vidíme proto, že velká část teorie lineární algebry, kterou probíráme v prvním semestru, pochází právě od Grassmanna.

Tvůrcem první axiomatické definice vektorového prostoru je Giuseppe Peano. Na rozdíl od Grassmanna byl Peano mezi matematiky obdivován pro svou schopnost precizně formulovat myšlenky. Také dokázal hbitě nacházet protipříklady k chybným tvrzením a nalézat chyby ve výsledcích ostatních matematiků. Jak uvidíme, byl opakem Grassmanna i v tom, že sklídl úspěch na poli matematiky, nikoliv však ve svých lingvistických a encyklopedických projektech.

Giuseppe Peano (1858, Cuneo, Itálie – 1932, Turín, Itálie)



Obrázek 18: Giuseppe Peano

Roku 1880 promoval na univerzitě v Turíně a získal post asistenta. V roce 1884 podle přednášek svého školitele Genocchiho ⁵⁸ sepsal *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*, podepsal se jen jako spoluautor, ale Genocchi píše v předmluvě: „... to vše je zásluhou tohoto výjimečného mladého muže Dr. Giuseppa Peana.“ Dílo přispělo k jeho jmenování profesorem téhož roku, získal tedy tento titul velmi mladý.

⁵⁷Ernst Steinitz (1871–1928), německý matematik

⁵⁸Angelo Genocchi (1817–1889), italský matematik

Nesmrtelnost Peanovi přinesly zejména tři výsledky:

- (a) 1889 – Peanovy axiomy přirozených čísel v díle *Arithmetices principia, nova methodo exposita*,
- (b) 1890 – Peanova křivka, což je spojitě zobrazení definované na $\langle 0, 1 \rangle$, jehož obor hodnot vyplní jednotkový čtverec,
- (c) položení základů matematické logiky a teorie množin.

Roku 1887 publikuje *Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale*, kde prokazuje dobrou znalost a schopnost dávat do zajímavých souvislostí výsledky Möbia, ⁵⁹ Hamiltona, Bellavitis a **Grassmanna**. V roce 1888 přichází Peanovo stěžejní dílo pro lineární algebru *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, precedutto dalle operazioni della logica deduttiva*, které končí **první axiomatickou definicí vektorového prostoru**. Moderním jazykem zde přehledně a srozumitelně zpracovává hlavní Grassmanovy myšlenky. Uvádí příklady vektorových prostorů: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, prostor lineárních zobrazení, prostor polynomů.

Významným počinem je založení časopisu věnovaného logice a teorii množin *Rivista di matematica* v roce 1891. Kvalitu časopisu zaručoval fakt, že Peano jako recenzent snadno nacházel ve výsledcích chyby a k nim protipříklady a garantoval tak publikaci pouze korektních výsledků.

Koncem 19. století nastává zlom v Peanově kariéře: věnuje čas ambiciózním projektům s malým ohlasem. V letech 1892 až 1908 pracuje na projektu *Formulario mathematico*, který má za cíl shrnout veškeré matematické výsledky do jediné knihy, navíc pomocí nové logické symboliky. Peano používá projekt i k výuce, jeden ze studentů vzpomíná: „Nutí nás trávit spoustu času učením se symboliky, kterou už nikdy jindy v životě nevyužijeme.“ Naopak ochotu naučit se Peanovo značení projevila roku 1900 Russel: „Znal jsem jeho práce, ale jeho značení jsem neovládal. Fakt, že se na Kongresu vyjadřoval přesněji než všichni ostatní a že vždy nacházel ty nejlepší argumenty, mě přiměl k rozhodnutí, že si jeho značení osvojím.“ ⁶⁰ V roce 1903 odstartoval další ambiciózní projekt *Latino sine flexione*, což měl být univerzální mezinárodní jazyk bez gramatiky, kombinující slova z latiny, angličtiny, němčiny a francouzštiny. A završením všeho bylo sepsání finální verze *Formulario mathematico* v tomto univerzálním jazyce *Latino sine flexione*!

Pro zajímavost uvedme Peanovu axiomatickou definici vektorového prostoru (nazývá jej lineární systém), abychom viděli, jak moc se podobá definici dnešní. Zapisujeme ji ovšem pomocí „naší“ symboliky.

⁵⁹August Ferdinand Möbius (1790–1868), německý matematik a astronom

⁶⁰Bertrand Arthur William Russell (1872–1970), britský matematik, logik, filozof a spisovatel, nositel Nobelovy ceny za literaturu

Definice 9.1. Necht V je množina, pro niž platí:

- (a) Je definována rovnost $\vec{a} = \vec{b}$ jako symetrická a tranzitivní relace na $V \times V$.
- (b) Je definováno sčítání jako zobrazení $V \times V \rightarrow V$ splňující:
1) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$, 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, 3) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- (c) Pro $\vec{a} \in V$ a $m \in \mathbb{N}$ znamená $m\vec{a}$ součet m prvků rovných $\vec{a}$. Snadno nahlédneme, že
4) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{b}$, 5) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$, 6) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$,
7) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$, 8) $1\vec{a} = \vec{a}$.
- (d) Je definováno násobení reálným číslem jako zobrazení $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, které zobecňuje vlastnosti pro násobení přirozeným číslem.
- (e) Existuje prvek $\vec{0}$, který pro každé $\vec{a} \in V$ splňuje $0\vec{a} = \vec{0}$. Pokud $\vec{a} - \vec{b}$ chápeme jako $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, pak je zřejmé, že 9) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$, 10) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Potom V nazveme **lineárním systémem**.

Axiomy týkající se rovnosti v dnešní definici neuvádíme, automaticky předpokládáme, že množina, kterou uvažujeme, je relací rovnosti vybavena. Bod (c) týkající se násobení přirozeným číslem je nadbytečný. Peano jej uvádí, aby čtenář lépe porozuměl, odkud se berou axiomy vyžadované po násobení reálným číslem. Podobně jsou nadbytečné body 9) a 10). Mají pouze čtenáři odhalit další důležité vlastnosti.

Úkol 9.2. * Vytvořte z Peanovy definice lineárního systému definici, která bude obsahovat pouze sedm axiomů a bude ekvivalentní s „naší“ definicí vektorového prostoru. To jest, vezmeme-li stejnou množinu V a těleso T a definujeme stejně operace, pak „našich“ osm axiomů bude platit právě tehdy, když bude platit sedm Peanových axiomů. (Nápověda: Vypusťte z Peanovy definice vše nadbytečné.)

Bývalo by tudíž stačilo použít v definici vektorového prostoru sedm axiomů. Definice s osmi axiomy se nám však jevila přehlednější.

Na přijetí konceptu vektorového prostoru si ale matematika ještě počkala až do 20. století. V roce 1920 Banach ve své dizertační práci zavádí úplné normované vektorové prostory, kterým se dnes říká Banachovy, a při té příležitosti definuje vektorový prostor přesně tak jako my dnes.⁶¹ První učebnice, v níž se objevuje pojem vektorový prostor, je *Modern Algebra* z roku 1930 od van der Waerdena⁶² (na rozdíl od matematické analýzy, kde je první učebnice již z roku 1696 od L'Hospitala).⁶³

⁶¹Stefan Banach (1892–1945), polský matematik

⁶²Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), holandský matematik a historik matematiky

⁶³Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, též psaný L'Hospital [výslovnost „gijom fransua antuan, marki d lopital“] (1661–1704), francouzský matematik

Rejstřík

- axiomy vektorového prostoru, 19
- báze, 35
 - duální, 80
 - standardní, 40
- bod, 100
- číselné těleso, 18
- čísla, 19
- čtyřtěn, 112
- defekt zobrazení, 69
- dimenze
 - variety, 100
 - vektorového prostoru, 37
- doplňěk podprostoru, 58
- ekvivalentní řádkové úpravy, 14
- funkcionál
 - lineární, 64
 - souřadnicový, 45
- Gaussova eliminace, 16
- generátor, 34
- hodnost
 - matice, 88
 - zobrazení, 69
- index
 - řádkový, 25
 - sloupcový, 25
- izomorfismus, 65
 - prostorů, 75
 - souřadnicový, 45
- jádro zobrazení, 69
- kartézský součin, 18
- kodimenze
 - podprostoru, 58
 - variety, 100
- koeficient
 - lineární kombinace, 29
 - polynomu, 114
- kombinace vektorů
 - afinní, 97
 - konvexní, 110
 - lineární, 28
 - netriviální, 29
 - triviální, 29
- konvexní množina, 110
- kořen polynomu, 114
- kořenový činitel polynomu, 116
- Kroneckerovo delta, 46
- lineární systém, 123
- lineární varieta, 96
- matice
 - čtvercová řádu n , 81
 - hermitovsky sdružená, 93
 - jednotková, 81
 - komplexně sdružená, 92
 - nulová, 26
 - přechodu, 87
 - regulární, 89
 - singulární, 89
 - soustavy (rozšířená), 13
 - transponovaná, 92
 - typu $m \times n$, 25
 - v horním stupňovitém tvaru, 15
 - zobrazení v bázích, 83
- maticový zápis soustavy LAR, 83
- nadrovina, 100
- násobení
 - vektoru číslem, 19

- zobrazení číslem, 62
- násobnost kořene polynomu, 116
- obal vektorů
 - afinní, 97
 - konvexní, 110
 - lineární, 29
- obraz množiny, 67
- operace, 19
- operátor
 - derivování, 70
 - identický, 64
 - integrování, 70
 - lineární, 64
 - regulární, 65
- partikulární řešení
 - rovnice, 74
 - soustavy LAR, 90
- podprostor, 49
 - triviální, 52
 - vlastní, 52
- polynom, 114
 - nulový, 114
 - reálný, 114
- projektor, 78
- prostor
 - duální, 64
 - izomorfní, 75
 - matic, 26
 - polynomů, 27
- průvodič, 27
- prvek matice, 25
- příčka variet, 102
- přímka, 100
- rovina, 100
- rovnice variety
 - neparametrické, 107
 - parametrické, 100
- směrová, 100
- vektorové, 107
- řádek matice, 25
- řešení soustavy LAR, 13
 - triviální, 14
- sčítání
 - vektorů, 19
 - zobrazení, 62
- simplex, 112
- sloupec
 - hlavní, 15
 - matice, 25
 - pravé strany, 13
 - vedlejší, 15
- složka vektoru, 24
- směrový vektor variety, 100
- soubor, 34
- součet množin, 52
 - direktní, 52
- součin matic, 81
- souřadnice vektoru, 45
- soustava LAR, 13
 - bez pravé strany, 14
 - homogenní, 14
 - s pravou stranou, 14
- spojnice, 96
- stupeň polynomu, 114
- těleso, 19
- trojúhelník, 112
- úsečka, 109
- uzavřenost
 - na násobení číslem, 49
 - na sčítání, 49
- varieta lineární, 96
- variety
 - mimoběžné, 101
 - rovnoběžné, 101

- různoběžné, 101
- vektor, 19
 - nulový, 20
 - opačný, 20
 - posunutí variety, 100
- vektorový prostor, 19
 - komplexní, 20
 - nulový, 24
 - reálný, 20
- vektory
 - afinně nezávislé, 104
 - afinně závislé, 104
 - konvexně nezávislé, 113
 - konvexně závislé, 113
 - lineárně nezávislé, 31
 - lineárně závislé, 32
- vzor množiny, 67
- zákon
 - asociativní, 20
 - distributivní, 20
 - komutativní, 20
- zaměření variety, 100
- zobrazení, 18
 - aditivní, 60
 - epimorfní, 65
 - homogenní, 60
 - izomorfní, 65
 - lineární (homomorfní), 60
 - monomorfní, 65
 - nulové, 63

Reference

- [1] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2005
- [2] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007
- [3] Bican L., *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2009
- [4] Děmidov S. S., *On the history of the theory of linear differential equations*, Archive for History of Exact Sciences 28 (1983), 369–387
- [5] Dorier J.-L., *Contribution a l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, thèse, 1990
- [6] Fiedler M., *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha, 1981
- [7] Humhal E., *Algebra 1*, <http://tjn.fjfi.cvut.cz/~humhal/> 2013
- [8] Motl L., Zahradník M., *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2003
- [9] Pytlíček J., *Lineární algebra a geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005
- [10] Ulrychová E., *Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů*, sborník 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008, Matfyzpress, editoři J. a M. Bečvářovi (2008), 179–184
- [11] Výborný K., Zahradník M., *Používáme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2002